Trabajo Monográfico

Sobre la métrica de Jacobi-Maupertuis de ciertos problemas gravitacionales

Por: José Fernández

Orientador: Dr. Ezequiel Maderna

Licenciatura en Matemática

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Uruguay

Octubre 2016

Índice

1 Introducción **5**

1.1 Ejemplo 7

1.2 Objetivo 7

2 Preliminares **9**

2.1 Cálculo de variaciones y ecuación de Euler-Lagrange 9

2.1.1 Extremales en $\mathbb{R}^n$ 10

2.1.2 Regularidad de curvas extremales 12

2.1.3 Lagrangianos en variedades 18

2.1.4 Campo de Euler-Lagrange 21

2.2 Aspectos simplécticos 23

2.2.1 Variedades Simplécticas 24

2.2.2 Fibrado cotangente y 1-forma de Liouville 26

2.3 Campo y flujo de Hamilton 29

2.3.1 Subespacios y subvariedades lagrangianas 30

2.3.2 Hamiltonianos y Lagrangianos 31

3 Métrica de Jacobi-Maupertuis **37**

3.1 Reparametrizaciones a un nivel de energía dado 39

3.2 Geodésicas minimizantes de la métrica de Jacobi 41

3.2.1 Curvas absolutamente continuas y minimizantes a tiempo libre 41

3.2.2 Propiedades de las minimizantes a tiempo libre en la métrica de Jacobi . 42

3.3 Rayos geodésicos 45

3.4 Funciones de Busemann 47

3.4.1 Construcción general en un espacio métrico 47

3.4.2 Caso riemanniano 49

3.4.3 Ejemplos de funciones de Busemann en variedades 53

4 Aplicaciones a problemas gravitacionales **61**

4.1 Problemas de n cuerpos 61

4.1.1 Introducción 61

4.1.2 Movimientos completamente parabólicos 62

4.1.3 Reparametrización de un movimiento homotético parabólico 68

4.1.4 El teorema de Marchal y sus aplicaciones 70

4.1.5 La métrica de Jacobi del nivel de energía 0 72

4.1.6 Función de busemann de un movimiento homotético parabólico 73

Referencias **75**

Capítulo 1

Introducción

Sea (M, g) una variedad riemanniana C^∞ compacta sin borde de dimensión n. Designaremos como $\pi : TM \longrightarrow M$ a su fibrado tangente que es una variedad de dimensión $2n$ no compacta. Sea $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 que denominaremos el *lagrangiano*.

Consideramos, para cada par de puntos $x, y \in M$ y tiempo positivo $\tau > 0$, el conjunto de curvas con extremos y tiempo fijos

$$\mathcal{C}^1(x, y, \tau) = \{\gamma : [a, b] \longrightarrow M \text{ de clase } C^1 \text{ por partes, con } b - a = \tau,\ \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y\,\}$$

en el cual se define $\mathbb{A}_L$, la *acción* del lagrangiano:

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_L : \mathcal{C}^1(x, y, \tau) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \gamma &\mapsto \int_a^b L\big(\gamma(s), \dot\gamma(s)\big)\, ds\,. \end{aligned}$$

Nos interesaremos especialmente en las curvas que son mínimos de este funcional, que serán puntos críticos en el espacio de curvas, en un sentido que definiremos más adelante. A estas curvas las llamaremos *extremales* de la acción.

Como veremos, si se cumple que L es un lagrangiano de clase C^2 estrictamente convexo, esto es, si $\big(\partial^2 L/\partial v^2\big)(x, v)$ es definida positiva como forma cuadrática para todo $(x, v) \in TM$, entonces las curvas extremales de la acción cumplirán las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) - \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial \mathbb{A}_L(\gamma) = 0\,.$$

Veremos también que las ecuaciones de Euler-Lagrange definen un flujo local ϕ_L^t en TM, cuyas órbitas son exactamente las curvas velocidades de las extremales, es decir

$$\big(x(t), v(t)\big) = \phi_L^t(x_0, v_0) \Longleftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t)\,. \\ x(t) \text{ curva extremal}\,. \\ \big(x(0), v(0)\big) = (x_0, v_0)\,. \end{cases}$$

A priori este flujo local no es completo, es decir, sus órbitas no están necesariamente definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.

En el fibrado cotangente $\pi : T^*M \to M$ introducimos la función H, el dual convexo de L, llamada el *hamiltoniano* del sistema:

$$H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$H(x,p) = \sup\left\{p(v) - L(x,v) \mid v \in T_xM\right\}\,.$$

El fibrado cotangente tiene una estructura natural de variedad simpléctica, donde el gradiente simpléctico del hamiltoniano es un campo $X_H : M \to T^*M$ con un flujo local ϕ_H^t asociado que resulta conjugado, mediante la transformada de Legendre, al flujo langrangiano ϕ_L^t. Por como se define el gradiente simpléctico, el hamiltoniano H es constante en las trayectorias de ϕ_H^t.

Bajo ciertas condiciones sobre L se logra que los conjuntos de nivel $H^{-1}(c) \subset T^*M$ con $c \in \mathbb{R}$ sean compactos, con lo cual el flujo hamiltoniano ϕ_H^t estará definido para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$. Por ser su conjugado, el flujo lagrangiano ϕ_L^t también será completo y entonces se puede estudiar su dinámica.

La segunda condición que se le pedirá a L será la superlinearidad sobre compactos de M: para todo $K \subset M$ compacto y todo $c > 0$ existe una constante $A(K,c) \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x,v) \geq c \parallel v \parallel + A(K,c) \quad \text{ para todo } (x,v) \in TK.$$

Esto en particular implica que

$$\lim_{\parallel v \parallel \to +\infty} \frac{L(x,v)}{\parallel v \parallel} = \infty \qquad \text{para todo } x \in M.$$

El hamiltoniano correspondiente H también es superlineal sobre compactos de M (con la norma dual). En el caso que M sea compacta, esto implica que H es propia (la preimágen de un compacto es compacta) con lo cual tendremos que $H^{-1}(c)$ es compacto para todo $c \in \mathbb{R}$.

1.1 Ejemplo

Sea (M, g) una variedad riemanniana y $V : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable, tomando el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \| v \|^2 - V(x).$$

Entonces, una curva $\gamma : (a, b) \to M$ es solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange, si cumple que

$$\ddot{\gamma} = -\nabla V(x)$$

y esta es la ecuación de Newton del sistema mecánico definido por el potencial V.

Siendo más explícitos, recordar que $\ddot{\gamma}(t) = \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}$ es la derivada covariante de $\dot{\gamma}(t)$, campo vectorial a lo largo de la curva $\gamma(t)$, respecto a la conexión de Levi-Civita dada por la métrica riemanniana g. A su vez, $\nabla V(x)$ es el gradiente de V respecto a la métrica g, es decir, el único vector que verifica

$$d_x V(u) = g_x\big(\nabla V(x), u\big) = \langle\, \nabla V(x), u \,\rangle_x \qquad \forall\, x \in M,\ \forall\, u \in T_x M\,.$$

Cabe destacar que el caso particular $V \equiv 0$ corresponde al flujo geodésico $\ddot{\gamma} = 0$ en la variedad (M, g), cuyas trayectorias son las curvas de M (con parámetro proporcional a la longitud de arco) que son minimizantes locales de la distancia generada por la métrica.

Veremos que el hamiltoniano correspondiente a estos sistemas mecánicos es

$$H(x, p) = \frac{1}{2} \| p \|^2 + V(x)$$

que, como todo hamiltoniano, es una integral primera del movimiento asociado.

1.2 Objetivo

Partiendo de una variedad riemanniana (M, g), con un lagrangiano dado por un potencial U, de la forma $L(x, v) = \frac{1}{2} \| v \|^2 + U(x)$. El objetivo de este trabajo es identificar las órbitas del flujo de Euler-Lagrange (de un nivel de energía $H = c$ dado) con las geodésicas de una métrica g_J conforme a g, la denominada métrica de Jacobi-Maupertuis. Esta construcción es debida inicialmente a Maupertuis, desarrollada en parte por Euler y luego por Jacobi.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Cálculo de variaciones y ecuación de Euler-Lagrange

Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano C^2. Buscamos minimizar la acción lagrangiana

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)dt$$

en el conjunto de curvas $\mathcal{C}^1(x, y, \tau)$ de clase C^1, con tiempo y extremos fijos.

Decimos que L es no degenerado si $\big(\partial^2 L/\partial v^2\big)(x, v) : T_xM \to \mathbb{R}$ es no degenerada como forma cuadrática, para todo $(x, v) \in TM$. También definimos la función $\mathcal{L} : TM \to T^*M$, que llamatemos transformada de *Legendre*, como

$$(x, v) \mapsto \left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\right)$$

donde $\dfrac{\partial L}{\partial v}(x, v) : T_xM \to \mathbb{R}$ es la 1-forma que asocia $u \mapsto \dfrac{\partial L}{\partial v}(x, v)(u)$.

Calculando en coordenadas el diferencial de $\mathcal{L}$ en un punto (x, v) obtenemos que

$$d\mathcal{L}_(x, v) = \begin{pmatrix} Id_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \end{pmatrix}$$

que implica que $d\mathcal{L}_(x, v)$ es invertible sí y solo sí $\big(\partial^2 L/\partial v^2\big)(x, v)$ es invertible. Es entonces consecuencia directa del teorema de la función inversa lo siguiente.

Proposición 2.1.1. *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^2 y $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ su transformada de Legendre. Se cumple entonces que*

$$L \text{ es no degenerado } C^r \iff \mathcal{L} \text{ es un difeomorfismo local } C^{r-1}.$$

$$L \text{ es no degenerado } C^r \text{ y } \mathcal{L} \text{ es inyectiva } \iff \mathcal{L} \text{ es un difeomorsimo } C^{r-1} \text{ sobre su imagen.}$$

2.1.1 Extremales en $\mathbb{R}^n$

Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva de clase C^r. Una variación C^r de la curva γ es un mapa $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ de clase C^r, que cumple que $\Gamma(t,0) = \gamma(t)$ para todo $t \in [a,b]$.

Fijando un $s \in (-\epsilon,\epsilon)$, este determina una curva $\Gamma_s : [a,b] \to M$ dada por $\Gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$. Diremos que una variación Γ tiene extremos fijos cuando $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ y $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ para todo $s \in (-\epsilon,\epsilon)$.

En lo que sigue, se trabajará con el caso particular en que la variedad M es un abierto de $\mathbb{R}^n$. A su vez, dada $\gamma : [a,b] \to M$ una curva C^1, usaremos un tipo particular de variaciones con extremos fijos, aprovechando que M está contenida en un espacio vectorial:

Sea $\gamma_1 : [a,b] \to M \subset \mathbb{R}^n$ una curva de clase C^∞ con $\gamma_1(a) = 0 = \gamma_1(b)$. Con esta curva se genera una variación $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ con extremos fijos, según γ_1, dada por la fórmula

$$\Gamma(t,s) = \gamma(t) + s\gamma_1(t)\,.$$

Definición 2.1.2. *Diremos que $\gamma : [a,b] \to M$ una curva C^1, es* extremal *si es un punto crítico de la acción lagrangiana. Es decir, si*

$$\frac{d\mathbb{A}_L}{ds}(\gamma + s\gamma_1)\bigg|_{s=0} = 0$$

para toda $\gamma_1 : [a,b] \to M$ curva C^∞ con $\gamma_1(a) = 0 = \gamma_1(b)$.

En particular, si se restringe una curva γ a un subintervalo $[a',b'] \subset [a,b]$, el conjunto de variaciones con extremos fijos en $[a',b']$ es un subconjunto de las variaciones con extremos fijos en $[a,b]$, porque se pueden extender a $[a,b]$ tomando el valor nulo en $[a',b']^C$. De esto se desprende el siguiente corolario.

Corolario 2.1.3. *Si $\gamma : [a,b] \to M$ es extremal entonces $\gamma|_{[a',b']}$ también es extremal para cualquier subintervalo $[a',b'] \subset [a,b]$.*

Al definir una curva extremal como un punto crítico inmediatamente se cumple lo siguiente.

Teorema 2.1.4. *Dado un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$, si $\gamma : [a,b] \to M$ minimiza la acción $\mathbb{A}_L$ en el conjunto de curvas con extremos y tiempo fijos, entonces γ es una curva extremal de L.*

Si requerimos que L sea de clase C^2 y γ de clase C^1 podemos diferenciar en la acción dentro del símbolo de la integral:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{A}_L}{ds}(\gamma + s\gamma_1)\bigg|_{s=0} &= \left(\int_a^b dL\big(\gamma(t) + s\gamma_1(t), \dot\gamma(t) + s\dot\gamma_1(t)\big)\big(\gamma_1(t), \dot\gamma_1(t)\big)\, dt \right)\bigg|_{s=0} \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt\,. \end{aligned}$$

Para que γ sea extremal esta integral tiene que ser nula para toda curva γ_1 que se anule en a y b. El siguiente resultado muestra que relación tiene que tener el lagrangiano con una curva extremal.

Teorema 2.1.5 (Euler-Lagrange)**.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^2 en M un abierto de $\mathbb{R}^n$. Una curva $\gamma : [a,b] \to M$ de clase C^2 es extremal sí y solo sí*

$$\frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\,.$$

Esta última igualdad es conocida como la ecuación de Euler-Lagrange.

Demostración. Como L y γ son suficientemente regulares para poder derivar adentro de la integral de la acción, sabemos que si γ es extremal entonces para cualquier $\gamma_1 : [a,b] \to M$ que se anule en a y b tenemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt \;= 0\,.$$

Integrando por partes el segundo término, vemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\; dt = \;\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\;\big(\gamma_1(t)\big)\;\bigg|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\; dt\,.$$

Como estamos derivando en una variación con extremos fijos, $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$ y concluímos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt = -\int_a^b \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\, dt\,.$$

Entonces la condición para que γ sea extremal se puede plantear como sigue:

$$\frac{d\mathbb{A}_L}{ds}(\gamma + s\gamma_1)\bigg|_{s=0} = \int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\right]\big(\gamma_1(t)\big)\, dt = 0\,.$$

Esta integral tiene que ser nula para *cualquier* curva $\gamma_1 : [a, b] \to M$ de clase C^∞ que verifique $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$. Esto implicará que la expresión entre paréntesis rectos tenga que ser nula para todo tiempo. Para probar esto, un lema aparte. □

Lema 2.1.6 (Du Bois-Reymond)**.** *Si $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n*}$ es un mapa continuo que cumple*

$$\int_a^b A(t)\big(\gamma_1(t)\big)\, dt = 0$$

para toda $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^0 con $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$ entonces $A(t) = 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Demostración. Suponiendo que $A \neq 0$, existe entonces un $t_0 \in [a, b]$ y un $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tales que $A(t_0)(v_0) > 0$. Por continuidad de $A(t)$, fijamos un $\epsilon > 0$ tal que $A(t)(v_0) > 0$ para todo $t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon] \subset [a, b]$. Sea $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^∞, positiva en $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$ y nula afuera de ese intervalo.

La curva $\phi \cdot v_0 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es de clase C^∞ y cumple la condición de anularse en los extremos, además se tiene que

$$\int_a^b A(t)\big(\phi(t)v_0\big)\, dt = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \phi(t)A(t)(v_0)\, dt > 0$$

porque la función $\phi(t)A(t)(v_0)$ es continua y positiva en $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$. Llegamos a una contradicción de las hipótesis y por ende $A(t) \equiv 0$. □

2.1.2 Regularidad de curvas extremales

En esta sección vamos a ver que las curvas extremales tienen la misma regularidad que el lagrangiano que las genera.

Dado un lagrangiano L de clase C^2, tenemos que la condición para que una curva $\gamma : [a,b] \to M$ de clase C^1 sea extremal, es que

$$\frac{d\mathbb{A}_L}{ds}(\gamma + s\gamma_1)\bigg|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\ dt = 0$$

Integramos por partes el primer término, llamando $p(t)$ a la primitiva del primer factor de dicho término

$$p(t) = \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\ ds$$

se cumple que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\ dt = p(t)\big(\gamma_1(t)\big)\bigg|_a^b - \int_a^b p(t)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\ dt\,.$$

Una vez más, como γ_1 se anula en los extremos de $[a,b]$, el primer término de la derecha de la igualdad se anula, con lo cual

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\ dt = -\int_a^b \left(\int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\ ds\right)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\ dt\,.$$

Reemplazando esto en la ecuación original de extremalidad, obtenemos que

$$\int_a^b \left[\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) - \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\ ds\right]\big(\dot\gamma_1(t)\big)\ dt = 0$$

para toda $\gamma_1 : [a,b] \to M$ de clase C^∞ con $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$.

Estamos nuevamente en una situación muy similar a la del lema de Du Bois-Reymond, en este caso la función entre paréntesis rectos no será nula, pero sí constante. Para ver eso, otro lema.

Lema 2.1.7 (Erdmann)**.** *Si $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{n*}$ es un mapa continuo y*

$$\int_a^b A(t)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\ dt = 0$$

para toda $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ de clase C^1 con $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$, entonces $A(t)$ es constante.

Demostración. En busca del absurdo supongamos que $A(t)$ no es constante en $[a,b]$, esto significa que existen dos tiempos $t_0 < t_1 \in [a,b]$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$A(t_0)(v) \neq A(t_1)(v)\,.$$

Como A es continua, esta última desigualdad se extiende a dos entornos disjuntos de t_0 y t_1, por lo tanto podemos suponer que $t_0, t_1 \in (a, b)$. Además, como $A(t)$ es lineal también podemos suponer que

$$A(t_0)(v) > A(t_1)(v)$$

cambiando v por $-v$ si no fuese el caso. Dado un $\delta > 0$, sea $\phi_\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua, positiva en $(-\delta, \delta)$ y nula afuera de ese intervalo, tal que

$$\int_{-\delta}^{\delta} \phi_\delta(t)\, dt = 1\,.$$

Vamos a construir una curva $\dot\gamma(t) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, de clase C^0, como sigue

$$\dot\gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [a, t_0 - \delta). \\ \phi_\delta(t - t_0)\, v & \text{si } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]. \\ 0 & \text{si } t \in (t_0 + \delta, t_1 - \delta). \\ -\phi_\delta(t - t_1)\, v & \text{si } t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta]. \\ 0 & \text{si } t \in (t_1 + \delta, b]. \end{cases}$$

Donde el δ considerado es tal que $\delta < \min\big\{t_0 - a, b - t_1, (t_1 - t_0)/2\big\}$. Podemos tomar ahora una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ que sea primitiva de $\dot\gamma$ y que se anule en los extremos de $[a, b]$. Esta curva es de clase C^1 y tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b A(t)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\, dt &= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} A(t)\big(\phi_\delta(t - t_0)\, v\big)\, dt \,+\, \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} A(t)\big(-\phi_\delta(t - t_1)\, v\big)\, dt \\ &= \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \phi_\delta(t - t_0)\, A(t)(v)\, dt \,-\, \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} \phi_\delta(t - t_1)\, A(t)(v)\, dt \\ &\geq \big(A(t_0)(v) - \varepsilon\big) \int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} \phi_\delta(t - t_0)\, dt \,-\, \big(A(t_1)(v) + \varepsilon\big) \int_{t_1-\delta}^{t_1+\delta} \phi_\delta(t - t_1)\, dt \\ &= A(t_0)(v) - A(t_1)(v) - 2\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Donde para las última desigualdad usamos que, como $A(t)$ es continua, podemos elegir un par $\varepsilon, \delta > 0$, tal que

$$A(t)(v) \geq A(t_0)(v) - \varepsilon \qquad \text{con } t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$A(t)(v) \leq A(t_1)(v) + \varepsilon \qquad \text{con } t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta].$$

Por último, como supusimos que $A(t_0)(v) > A(t_1)(v)$ y el valor ε es arbitrario, entonces existe un $\delta > 0$ tal que la integral es no nula, contradiciendo la hipótesis del lema. □

Veamos ahora como hacemors uso de este lema. Tenemos que

$$\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) = p_0 + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\,ds$$

con $p_0 \in \mathbb{R}^{n*}$. Más específicamente, evaluando en $t = a$ nos da el valor

$$p_0 = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a),\dot\gamma(a)\big)\,.$$

Hemos demostrado la siguiente proposición.

Proposición 2.1.8. *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^1 donde M es un abierto de $\mathbb{R}^n$. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva extremal de clase C^1, entonces*

$$\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a),\dot\gamma(a)\big) + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\,ds\,.$$

Esta es una igualdad entre funcionales de $\mathbb{R}^n$, con la identificación usual de $\mathbb{R}^n$ con $\mathbb{R}^{n*}$. Notar que si L y γ son de clase C^2, derivando con respecto a t obtenemos la ecuación de Euler-Lagrange.

Con lo visto podemos probar que si γ es extremal de clase C^1 de L, un lagrangiano no degenerado, entonces necesariamente γ tiene la misma regularidad que L.

Corolario 2.1.9. *Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es un lagrangiano no degenerado de clase C^r, con $r \geq 2$, en $M \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces toda curva extremal de L de clase C^1 es de clase C^r.*

Demostración. Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva extremal de clase C^1. Fijando $t_0 \in [a,b]$, miramos el punto $\big(\gamma(t_0),\dot\gamma(t_0)\big) = (x_0,v_0) \in TM$. Como suponemos que L es no degenerado, por 2.1.1, su transformada de Legendre $\mathcal{L} : (x,v) \mapsto \left(x, \dfrac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)$ es un difeomorfismo local de clase C^{r-1}.

Llamamos $\mathcal{K} : T^*M \to TM$ a su inversa local en el punto $\left(x_0, \dfrac{\partial L}{\partial v}(x_0,v_0)\right)$. Como ambas curvas γ y $\dot\gamma$ son continuas, entonces para t en un entorno de t_0 se cumple que

$$\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) = \mathcal{K}\left(\gamma(t), \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\right) \qquad (\star)$$

pero como vimos en la proposición anterior 2.1.8

$$\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a),\dot\gamma(a)\big) + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(s),\dot\gamma(s)\big)\,ds$$

lo que implica que si γ es extremal C^1, entonces, como L es C^1, la función del tiempo

$$t \mapsto \left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$$

es de clase C^1. De aquí que el lado derecho de la ecuación $(\star)$ es por lo menos C^1, por lo tanto el lado izquierdo también, lo que siginifica que $\dot{\gamma}$ es C^1, o sea, la extremal γ es de clase C^2.

Este razonamiento se puede iterar: Si L es C^2, como ahora γ es C^2, entonces la función $\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$ se vuelve también de clase C^2. Suponiendo que $\mathcal{K}$ es C^2 entonces la ecuación $(\star)$ implica que γ es C^3.

Concluímos que si $\mathcal{K}$ es de clase C^{r-1} entonces γ es C^r, la clase de regularidad de L. □

Probamos ahora un resultado más fuerte, pidiéndole un poco más a L.

Corolario 2.1.10. *Sea L un lagrangiano de clase C^r, con $r \geq 2$, en $M \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si su transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces toda curva extremal C^1 por partes es de clase C^r.*

Demostración. Si $\mathcal{L}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces es no degenerado (por la proposición 2.1.1) y cumple las hipótesis del corolario anterior. Sabemos entonces que toda extremal C^1 es de clase C^r, pero definimos las extremales en el conjunto de curvas C^1 por partes, debemos considerar ese caso.

Sea una extremal $\gamma : [a, b] \to M$ de clase C^1 por partes y sea $a_0 = a < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k+1} = b$ una subdivisión finita de $[a, b]$ tal que la restricción $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es C^1, para todo $i = 0, \ldots, k$. Estas restricciones también son curvas extremales (corolario 2.1.3) y son de clase C^1, entonces por el corolario anterior son de clase C^r.

Resta ver que sucede en los tiempos a_i para $i = 1, \ldots, k$. Sea $\gamma_1 : [a, b] \to M$ curva C^∞ que se anula en a y b, como γ es extremal sabemos que

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma}_1(t)\big)\, dt = 0$$

como en cada subintervalo $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es como mínimo C^2 para todo $i = 0, \ldots, k$, Podemos integrar por partes el segundo término (como se hizo para obtener la ecuación de Euler-Lagrange)

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma}_1(t)\big)\, dt = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\, dt$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\dot\gamma_1(t)\big)\,dt \\ &= \sum_{i=0}^{k}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \left[\frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big) - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\right]\big(\gamma_1(t)\big)\,dt + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} \end{aligned}$$

y como cada $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ es extremal de clase C^2, verifica entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para todo $i = 0,\dots,k$. Las integrales se anulan y llegamos finalmente a que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\gamma_1(t)\big)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} \\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i+1}),\dot\gamma_-(a_{i+1})\big)\big(\gamma_1(a_{i+1})\big) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_i),\dot\gamma_+(a_i)\big)\big(\gamma_1(a_i)\big) \end{aligned}$$

donde $\dot\gamma_+$ y $\dot\gamma_-$ corresponden a la derivada de γ por derecha y por izquierda respectivamente.

La igualdad obtenida se cumple para toda $\gamma_1 : [a,b] \to M$, con $\gamma_1(a) = \gamma_1(b) = 0$. Dado un $1 \le i_0 \le k$, se elige una curva $\tilde\gamma_1$ de clase C^∞ que se anule en $[a, a_{i_0-1}] \cup [a_{i_0+1}, b]$ y tenga un valor arbitrario en a_{i_0}. Concluimos que

$$\sum_{i=0}^{k} \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\big(\tilde\gamma_1(t)\big)\Big|_{a_i}^{a_{i+1}} = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i_0}),\dot\gamma_-(a_{i_0})\big)\big(\tilde\gamma_1(a_{i_0})\big) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i_0}),\dot\gamma_+(a_{i_0})\big)\big(\tilde\gamma_1(a_{i_0})\big) = 0$$

como $\tilde\gamma_1(a_{i_0})$ puede tomar cualquier valor, necesariamente se cumple que

$$\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i_0}),\dot\gamma_+(a_{i_0})\big) = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i_0}),\dot\gamma_-(a_{i_0})\big).$$

Esto equivale a decir que

$$\mathcal{L}\big(\gamma(a_{i_0}),\dot\gamma_+(a_{i_0})\big) = \mathcal{L}\big(\gamma(a_{i_0}),\dot\gamma_-(a_{i_0})\big)$$

por último, queremos concluir que $\dot\gamma_+(a_{i_0}) = \dot\gamma_-(a_{i_0})$. Para esto precisamos la hipótesis que la transformada de Legendre $\mathcal{L}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, y es entonces inyectiva, con lo cual

$$\dot\gamma_+(a_{i_0}) = \dot\gamma_-(a_{i_0}) \qquad \text{para todo } i = 1,\dots,k.$$

En conclusión, cualquier curva γ extremal C^1 por partes, es necesariamente de clase C^1 y por lo tanto, conforme al corolario anterior, termina siendo de clase C^r. □

2.1.3 Lagrangianos en variedades

Hasta ahora todo lo demostrado fue para lagrangianos en abiertos de $\mathbb{R}^n$, todos estos resultados se generalizan a variedades arbitrarias, aplicándose localmente en entornos coordenados.

En el caso euclidiano, fue conveniente tomar las variaciones del tipo $\gamma(t) + s\gamma_1(t)$ usando la estructura de espacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, en variedades arbitrarias eso no es posible y se usan variaciones más generales.

Antes de pasar a el caso arbitrario probamos un último resultado para M un abierto de $\mathbb{R}^n$, que establece una fórmula para la derivada de la acción con respecto a una variación arbitraria (sin extremos fijos) sobre una curva extremal.

Teorema 2.1.11 (Fórmula de la primera variación)**.** *Si $\gamma : [a,b] \to M$ es una curva extremal de un lagrangiano L de clase C^2, definido en un abierto de $\mathbb{R}^n$, entonces, para cualquier variación de γ $\Gamma : [a,b] \times (-\epsilon,\epsilon) \to M$ de clase C^2, la derivada de la acción vale*

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\Big|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(b),\dot\gamma(b)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a),\dot\gamma(a)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0)\right).$$

Demostración.

$$\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big) = \int_a^b L\left(\Gamma_s(t), \frac{\partial \Gamma_s}{\partial t}(t)\right) dt\,.$$

Como L es diferenciable y Γ es C^2 podemos derivar dentro del signo de la integral

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\Big|_{s=0} &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\left(\Gamma(t,s), \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial t}(t)\right)\left(\frac{\partial \Gamma_s}{\partial s}(t)\right) + \\ &\quad + \frac{\partial L}{\partial v}\left(\Gamma(t,s), \frac{\partial \Gamma(t,s)}{\partial t}(t)\right)\left(\frac{\partial^2 \Gamma_s}{\partial t \partial s}(t)\right)\Big|_{s=0} dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial s}(t)\right) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\left(\frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial t \partial s}(t)\right) dt\,.\end{aligned}$$

Como γ es extremal de clase C^2 cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\Big|_{s=0} &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\right]\left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial s}(t)\right) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\left(\frac{\partial^2 \Gamma_0}{\partial t \partial s}(t)\right) dt \\ &= \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t),\dot\gamma(t)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t,0)\right)\Big|_a^b\,.\end{aligned}$$

□

Ahora podemos generalizar la definición de curva extremal a una variedad cualquiera.

Definición 2.1.12. *Sea M una variedad diferenciable y sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^2. Una curva $\gamma : [a, b] \to M$ es extremal sí y solo sí*

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\Big|_{s=0} = 0$$

para cualquier $\Gamma : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ variación de γ de clase C^2, tal que

$$\Gamma(a, s) = \gamma(a) \quad y \quad \Gamma(b, s) = \gamma(b) \qquad \text{para todo } s \in (-\epsilon, \epsilon).$$

Veamos que esta definición coincide con la dada en el caso de M un abierto de $\mathbb{R}^n$. Si γ es una curva extremal en $\mathbb{R}^n$ (con la definición anterior) y $\Gamma : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ es una variación C^2 con extrems fijo, al calcular la derivada parcial según s de la acción, como la variación es constante en los extremos, obtenemos que

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial s}(a, 0) \;=\; \frac{\partial\Gamma}{\partial s}(b, 0) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\Big|_{s=0} = 0\,.$$

por la fórmula de la primera variación 2.1.11. Recíprocamente, las variaciones en $\mathbb{R}^n$ de la forma $\Gamma(t, s) = \gamma(t) + s\,\gamma_1(t)$ (donde γ y γ_1 son curvas definidas en un intervalo $[a, b]$, de clase C^2 y C^∞ respectivamente) son variaciones de clase C^2 y cumplen la condición de tener extremos fijos, por lo cual

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L(\gamma + s\gamma_1)\Big|_{s=0} = 0\,.$$

De igual forma que fue hecho en el caso euclídeo, se generaliza a variedades arbitrarias lo siguiente.

Corolario 2.1.13. *Dado un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$, si una curva $\gamma : [a, b] \to M$ minimiza $\mathbb{A}_L$ en el conjunto de curvas $\mathcal{C}^1(\gamma(a), \gamma(b), b - a)$, entonces γ es una curva extremal de L.*

Corolario 2.1.14. *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^2. Si $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva extremal de clase C^2 entonces $\gamma|_{[a',b']}$ es extremal para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$.*

A su vez, esto implica que si γ es una curva extremal y un segmento $\gamma|_{[a',b']}$ está incluído en un entorno coordenado, entonces ese segmento cumple todo lo ya visto para el caso en que M es un abierto de $\mathbb{R}^n$, en particular:

Teorema 2.1.15 (Euler-Lagrange)**.** *Sea M una variedad diferenciable y $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^2 en M. Sea $\gamma : [a, b] \to M$ una curva extremal de clase C^2. Entonces,*

para todo subintervalo $[a', b'] \subset [a, b]$ *tal que* $\gamma\big([a', b']\big)$ *está incluido en un entorno coordenado* $U \subset M$*, la curva* $\gamma|_{[a',b']}$ *cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas.*

Recíprocamente, si para todo $t_0 \in (a, b)$ *existe un* $\varepsilon > 0$ *y un entorno coordenado* $U_0 \subset M$*, en el cual* $\gamma|_{[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]}$ *cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas, entonces la curva* γ *es una extremal de* L*.*

La prueba del enunciado recíproco se desprende de la prueba de la fórmula de la primera variación, para el caso general en que M es una variedad diferenciable, que se demuestra a continuación.

Teorema 2.1.16 (Fórmula de la primera variación)**.** *Sea* $L : TM \to \mathbb{R}$ *un lagrangiano* C^2 *en una variedad* M *y sea* $\gamma : [a, b] \to M$ *una curva extremal de clase* C^2*. Entonces, para cada* $\Gamma : [a, b] \times (-\epsilon, \epsilon) \to M$ *variación* C^2 *de* γ*, se cumple que*

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\bigg|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(b), \dot\gamma(b)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a), \dot\gamma(a)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0)\right).$$

Demostración. Como $\gamma\big([a, b]\big) \subset M$ es compacto, podemos tomar una subdivisión de $[a, b]$ en subintervalos $[a_i, a_{i+1}]$ con $i = 0, \dots, k$, donde cada subsegmento $\gamma\big([a_i, a_{i+1}]\big)$ esté incluido en un entorno coordenado.

Como $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ es extremal, γ cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en coordenadas y entonces también cumple la fórmula de la primera variación (para el caso en que M es un abierto de $\mathbb{R}^n$) vista en el teorema 2.1.11

$$\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s|_{[a_i,a_{i+1}]}\big)\bigg|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_{i+1}), \dot\gamma(a_{i+1})\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_{i+1}, 0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a_i), \dot\gamma(a_i)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_i, 0)\right).$$

Sumando en i, encontramos que los términos intermedios se cancelan, entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s\big)\bigg|_{s=0} &= \sum_{i=0}^{k} \frac{d}{ds}\mathbb{A}_L\big(\Gamma_s|_{[a_i,a_{i+1}]}\big)\bigg|_{s=0} \\ &= \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(b), \dot\gamma(b)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(a), \dot\gamma(a)\big)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0)\right).\end{aligned}$$

□

El último resultado que falta generalizar es que las curvas extremales son igual de regulares que el lagrangiano que las genera. Al tratarse de una propiedad local solo precisa verificarse en un entorno coordenado, por lo que se enuncia sin mayor aclaración.

Proposición 2.1.17 (Regularidad de curvas extremales)**.** *Sea M una variedad diferenciable y $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^r con ($r \geq 2$) tal que su transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen. Entonces toda curva extremal C^1 por partes es de clase C^r.*

2.1.4 Campo de Euler-Lagrange

Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^r no degenerado (con $r \geq 2$) y $\gamma : [a, b] \to M$ una curva extremal C^2 (que en definitiva es C^r). Vista en cualquier sistema de coordenadas γ cumple la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big).$$

Computando la derivada según t, se obtiene que

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\ddot{\gamma}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma}(t)\big)\,.$$

Como L es no degenerado $(\partial^2 L)/(\partial v^2)(x, v)$ es invertible y se puede despejar $\ddot{\gamma}(t) \in TTM$. Esto da lugar a una ecuación diferencial de segundo orden para $\gamma(t)$, que a su vez induce un campo vectorial en el fibrado tangente $X_L : TM \to TTM$ de clase C^{r-2} definido como

$$(x, v) \mapsto \Big(v, \tilde{X}_L(x, v)\Big) \in T_{(x,v)}TM$$

con $\tilde{X}_L$ dado en coordenadas por la ecuación

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)\Big(\tilde{X}_L(x, v)\Big) = \frac{\partial L}{\partial x}(x, v) - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v)(v)\,.$$

A priori este campo no está bien definido, resta ver que es independiente de la parametrización.

Teorema 2.1.18. *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano C^r no degenerado con $r \geq 2$. Entonces existe un único campo vectorial X_L en TM, de clase C^{r-2}, tal que sus soluciones son de la forma $t \mapsto \big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$ donde $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva extremal de L.*

Demostración. Dado un $(x.v) \in TM$, tomamos un entorno coordenado $U \subset M$ de x. Como la ecuación diferencial del campo es de la forma $(x, v) \mapsto \big(v, \tilde{X}_L(x, v)\big)$ sus curvas solución son

de la forma $\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)$ con $\gamma : [a, b] \to U \subset M$ de clase C^r. Por como se construyó el campo, en esas coordenadas γ cumple la ecuación de Euler-Lagrange y entonces es una curva extremal.

Esto quiere decir que las curvas integrales de X_L son todas de la forma $t \mapsto \big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)$ con $\gamma : [a, b] \to M$ de clase C^r curva extremal de L. Como la condición de que γ sea extremal no depende de las coordenadas donde se mire, entonces el campo X_L está bien definido. □

Corolario 2.1.19. *Sea L un lagrangiano C^r no degenerado, con $r \geq 2$. Entonces para todo $(x, v) \in TM$ existe una curva extremal $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ que cumple las condiciones iniciales $\gamma(0) = x$ y $\dot\gamma(0) = v$.*

Si L es C^3 cualquier otra curva solución $\tilde\gamma(t)$ coincide con $\gamma(t)$ en la intersección de sus dominios.

Demostración. Dado $(x, v) \in TM$, como X_L es de clase C^{r-2} entonces es como mínimo continuo, por el teorema de Peano existe una solucion $c(t) : (-\varepsilon, \varepsilon) \to TM$ con condición inicial (x, v). Por el teorema anterior, esta solución es de la forma $c(t) = \big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)$ con $\gamma(t)$ una curva extremal de L.

Si L es C^3 entonces el campo X_L es de clase C^1 y el teorema de Picard nos da la unicidad deseada. □

Definición 2.1.20 (Campo y flujo de Euler-Lagrange)**.** *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano C^r no degenerado, con $r \geq 2$. Al campo $X_L : TM \to TTM$ cuyas órbitas son de la forma $(\gamma, \dot\gamma)$ con γ una extremal de L, se lo denomina* campo de Euler-Lagrange *del lagrangiano L.*

Si $r \geq 3$ este campo es únicamente integrable, es decir, genera un flujo parcial $\phi_t^L : TM \to TM$ de clase C^{r-2}, al cual llamaremos flujo de Euler-Lagrange *del lagrangiano L.*

Se enuncia un último resultado (cuya demostración se verá en la sección 2.2) que implica que el campo X_L puede ser C^0 y tener un flujo parcial C^1.

Teorema 2.1.21. *Sea M una variedad diferenciable y $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^r no degenerado, con $r \geq 2$. Si su transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces el campo $X_L : TM \to TTM$ de clase C^{r-2} es únicamente integrable y define un flujo local ϕ_t^L de clase C^{r-1}.*

2.2 Aspectos simplécticos

Mapas bilineales antisimétricos

Sea E un espacio vectorial real de dimensión m y sea $\Omega : E \times E \to \mathbb{R}$ un mapa bilineal antisimétrico, esto es, $\Omega(u, v) = -\Omega(v, u)$ para todo $u, v \in E$. Podemos caracterizar estos mapas con las siguientes bases.

Teorema 2.2.1 (Base estándar de un mapa bilineal antisimétrico)**.** *Dado E un espacio vectorial real de dimensión finita y $\Omega : E \times E \to \mathbb{R}$ un mapa bilineal antisimétrico. Se cumple que existe una base $\{u_1, \ldots, u_k, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ de E, tal que*

$$\begin{aligned} \Omega(u_i, v) &= 0 && \text{para todo } i = 1, \ldots, k \text{ y } v \in E. \\ \Omega(e_i, e_j) = 0 = \Omega(f_i, f_j) &&& \text{para todo } i, j = 1, \ldots, n. \\ \Omega(e_i, f_j) &= \delta_{ij} && \text{para todo } i, j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Este tipo de base se denomina base canónica y en ella se tiene que la forma matricial de Ω es

$$\Omega(u, v) = \begin{bmatrix} — & u & — \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Id \\ 0 & -Id & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | \\ v \\ | \end{bmatrix}$$

Demostración. Se prueba por inducción, usando el proceso de Gram-Schmidt en una versión antisimétrica. Sea el subespacio $U = \{u \in E \mid \Omega(u, v) = 0 \text{ para todo } v \in E\}$ y $\{u_1, \ldots, u_k\}$ una base de U. Sea W un subespacio complementario a U en E

$$E = U \oplus W.$$

Agarrando un vector no nulo cualquiera $e_1 \in W$, como no está en U entonces existe $f_1 \in W$ tal que $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$, asumimos que $\Omega(e_1, f_1) = 1$.

Sea $W_1 = [e_1, f_1]$ el subespacio generado por ambos vectores, y sea

$$W_1^{\perp} = \{w \in W \mid \Omega(w, v) = 0 \text{ para todo } v \in W_1\}$$

el complemento ortogonal de W_1 en W. Probamos ahora que

$$W = W_1 \oplus W_1^{\perp}.$$

Para ver esto tomamos un $v \in W$, si $\Omega(v, e_1) = c$ y $\Omega(v, f_1) = d$, entonces

$$v = \underbrace{(de_1 - cf_1)}_{\in W_1} + \underbrace{(v + cf_1 - de_1)}_{\in W_1^{\perp}}.$$

Prosiguiendo, se toma un vector no nulo cualquiera $e_2 \in W_1^{\perp}$, como no está en U entonces existe $f_2 \in W_1^{\perp}$ tal que $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$ y podemos asumir que $\Omega(e_2, f_2) = 1$. Sea $W_2 = [e_2, f_2]$ el subespacio generado por ambos vectores, el cual está incluído en $W_1^{\perp}$.

Este proceso se continúa y eventualmente termina porque E tiene dimensión finita, obteniéndose que

$$E = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_n$$

donde todos los sumandos son ortogonales con respecto a Ω y cada W_i tiene una base $\{e_i, f_i\}$ con $\Omega(e_i, f_i) = 1$. □

2.2.1 Variedades Simplécticas

Definición 2.2.2. *Un mapa bilineal antisimétrico $\Omega : E \times E \to \mathbb{R}$ definido en un espacio vectorial E de dimensión finita, se dice* simpléctico *o no degenerado, si en la descomposición canónica dada por el teorema 2.2.1 se cumple que $U = \{0\}$.*

Al par (E, Ω) se lo denomina espacio vectorial simpléctico.

Proposición 2.2.3. *Si $\Omega : E \times E \to \mathbb{R}$ es una forma simpléctica en el espacio vectorial E entonces la transformación lineal $\tilde{\Omega} : E \to E^*$ dada por*

$$\tilde{\Omega}(u)(v) = \Omega(u, v)$$

es un isomorfismo.

Demostración. El núcleo de $\tilde{\Omega}$ es el subespacio U definido anteriormente, y como Ω es simpléctica entonces U es nulo. □

Proposición 2.2.4. *Todo espacio vectorial simpléctico (E, Ω) es de dimensión par.*

Demostración. Tomando la base canónica dada por el teorema 2.2.1, como $U = \{0\}$, esta es de la forma $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n\}$ y por lo tanto E tiene dimensión $2n$. □

Vemos ahora como tomar, en una variedad, formas simplécticas definidas en cada espacio tangente y una noción con la cual estas formas varíen diferenciablemente.

Definición 2.2.5 (2-forma de De Rham)**.** *Sea M una variedad diferenciable. Una 2-forma de De Rham ω en M asocia a cada punto $p \in M$ un mapa $\omega_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ bilineal antisimétrico, de tal forma que ω_p varía diferenciablemente con p.*

Esto es, para todo par de campos de vectores tangentes $X, Y \in \chi(M)$, la función

$$\omega(X, Y) : M \to \mathbb{R} \qquad p \mapsto \omega_p\big(X(p), Y(p)\big)$$

es diferenciable.

Definición 2.2.6 (Variedad Simpléctica)**.** *A una 2-forma ω en M se la llama* forma simpléctica *si es cerrada y ω_p es simpléctica en T_pM para todo $p \in M$. Diremos que el par (M, ω) es una* variedad simpléctica.

Notar que para que ω_p sea simpléctica es necesario que T_pM tenga dimensión par, lo que equivale a que M tenga que ser de dimensión par.

Vamos a ver como se transportan formas diferenciales entre variedades, lo cual permite dar una noción de equivalencia entre variedades simplécticas.

Definición 2.2.7 (Pullback)**.** *Sea M_1 una variedad y (M_2, ω_2) una variedad simpléctica. Dada $\phi : M_1 \to M_2$ una función diferenciable, definimos $\phi^*\omega_2$ una 2-forma en M_1 (llamada el pullback por ϕ de ω_2) por la siguiente expresión*

$$(\phi^*\omega_2)_p\,(u, v) = (\omega_2)_{\phi(p)}\big(d\phi_p(u), d\phi_p(u)\big) \qquad \text{para todo } u, v \in T_pM_1\,.$$

Definición 2.2.8 (Simplectomorfismo)**.** *Sean (M_1, ω_1) y (M_2, ω_2) dos variedades simplécticas de la misma dimensión, y sea $\phi : M_1 \to M_2$ un difeomorfismo. Diremos que ϕ es un* simplectomorfismo *si*

$$\phi^*\omega_2 = \omega_1\,.$$

El teorema de Darboux (enunciado a continuación) establece que en la clasificación módulo simplectomorfismos de las variedades simplécticas no es posible utilizar invariantes locales, ya que el único invariante local es la dimensión.

Igual que toda variedad diferenciable es localmente difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, toda variedad simpléctica es localmente simplectomorfa a (R^{2n}, ω_0). Donde $\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ está dada por la base simpléctica canónica, de la forma vista en 2.2.1, que consiste de los vectores $e_i = (0, \ldots, \underbrace{1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ y $f_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n+i}, \ldots, 0)$ con $i = 1, \ldots, n$.

Teorema 2.2.9 (Darboux)**.** *Sea (M, ω) una variedad simpléctica de dimensión $2n$ y sea p un punto cualquiera de M. Entonces existe un entorno coordenado $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ centrado en p, tal que en $\mathcal{U}$*

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dy_i.$$

A un entorno coordenado $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ con esas características se lo denomina *entorno de Darboux*. Para ver una prueba del teorema consultar por ejemplo [HZ11, p. 10].

2.2.2 Fibrado cotangente y 1-forma de Liouville

Sea X una variedad n-dimensional y sea T^*X su fibrado cotangente. Si tomamos una carta local $(\mathcal{U} \subset X, x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, entonces $\{(dx_1)_x, \ldots, (dx_n)_x\}$ (los diferenciales de las funciones coordenadas) forman una base de T_x^*X.

Entonces para cualquier 1-forma $\xi \in T_x^*X$ se tiene que $\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i (dx_i)_x$ para alguna n-upla $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Esto da lugar al sistema de coordenadas $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ llamadas *coordenadas cotangentes* de T^*X asociadas a las coordenadas $(\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n)$.

Sea $\pi : T^*X \to X$ la proyección natural del fibrado cotangente. Por conveniencia llamemos $M = T^*X$, tomando un punto $p = (x, \xi) \in M$ observemos las siguientes relaciones

$$\pi\big((x,\xi)\big) = x \qquad \begin{array}{ccc} M = T^*X & T_pM & T_p^*M \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} & \big\downarrow{\scriptstyle d\pi_p} & \big\uparrow{\scriptstyle (d\pi_p)^*} \\ X & T_xX & T_x^*X \end{array} \qquad (d\pi_p)^*(\xi) = \xi \circ d\pi_p$$

que indican una manera natural de "levantar" las 1-formas $\xi \in T_x^*X$ a 1-formas en $T_{(x,\xi)}T^*X$.

Definición 2.2.10 (1-forma de Liouville)**.** *Sea X una variedad diferenciable y sea $M = T^*X$ su fibrado cotangente. Definimos la* forma tautológica *o* 1-forma de Liouville *como una sección $\alpha : M \to T^*M$, tal que para todo punto (x, ξ) del fibrado cotangente, $\alpha_{(x,\xi)} : T_{(x,\xi)}M \to \mathbb{R}$ es la 1-forma*

$$\alpha_{(x,\xi)} = (d\pi_{(x,\xi)})^*(\xi) = \xi \circ d\pi_{(x,\xi)}$$
$$v \mapsto \xi\big(d\pi_{(x,\xi)}(v)\big)$$

donde $\pi : T^*X \to X$ es la proyección canónica del fibrado.

Pasamos a ver como se expresa esta 1-forma en coordenadas cotangentes.

Proposición 2.2.11. *Sea $(\mathcal{U} \subset X, x_1, \ldots, x_n)$ un sistema de coordenadas, con sus coordenadas cotangentes asociadas $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$. Entonces la 1-forma de Liouville está dada en estas coordenadas por*

$$\alpha_{(x,\xi)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx_i \, .$$

Demostración. Como la proyección $\pi : T^*X \to X$ en coordenadas cotangentes cumple que

$$\pi\big((x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)\big) = (x_1, \ldots, x_n) \, .$$

Si se toma un $v \in T_{(x,\xi)}M$, entonces en estas coordenadas se escribe como

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} w_j \frac{\partial}{\partial \xi_i} \qquad \Longrightarrow \qquad d\pi_{(x,\xi)}(v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Ahora, como

$$\alpha_{(x,\xi)}(v) \;=\; \xi\big(d\pi_{(x,\xi)}(v)\big) \;=\; \sum_{i=1}^{n} v_i \, \xi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, v_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, dx_i(v)$$

□

La 1-forma de Liouville α posee la siguiente propiedad que la caracteriza.

Lema 2.2.12. *Sea $\mu : X \to T^*X$ una 1-forma cualquiera en X con $\mu(x) = (x, \mu_x)$, entonces*

$$\mu^*\alpha = \mu \, .$$

Demostración. Sean $(\mathcal{U}, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)$ coordenadas en un entorno de X. Vamos a verificar el lema localmente usando las coordenadas cotangentes $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ donde hacemos énfasis en marcar la diferencia entre $\tilde{x}_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ (las funciones coordenadas en X) con las funciones coordenadas $x_i : T^*\mathcal{U} \to \mathbb{R}$ en T^*X. Porque en general se hace un ligero abuso de notación llamando a ambas x_i.

En estas coordenadas la 1-forma se plantea como $\mu(x) = \big(x_1, \ldots, x_n, \mu_1(x), \ldots, \mu_n(x)\big)$, su diferencial es

$$d_x\mu = \sum_{i=1}^{n} d\tilde{x}_i \, \frac{\partial}{\partial x_i} + d_x\mu_i \, \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Por la proposición anterior sabemos que en estas coordenadas $\alpha_{(x,\mu_x)} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\, dx_i$ y como se tiene que $(\mu^*\alpha)_x = \alpha_{(x,\mu_x)}(d_x\mu)$ entonces

$$(\mu^*\alpha)_x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\, dx_i \left(\sum_{i=1}^{n} d\tilde{x}_i \frac{\partial}{\partial x_i} + d_x\mu_i \frac{\partial}{\partial \xi_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)\, d\tilde{x}_i = \mu_x \,.$$

□

De especial importancia es que la 1-forma tautológica sirve para darle una estructura natural de variedad simpléctica al fibrado cotangente de cualquier variedad.

Teorema 2.2.13. *Sea X una variedad y sea $M = T^*X$ su fibrado cotangente. Si tomamos la 2-forma ω en M dada por*

$$\omega = -d\alpha$$

donde $\alpha : M \to T^*M$ es la 1-forma de Liouville, entonces (T^*X, ω) es una variedad simpléctica.

Demostración. Por ser la derivada exterior de una 1-forma, inmediatamente sabemos que ω es cerrada. Nos resta verificar que es no degenerada, para lo cual tomamos un sistema de coordenadas cotangentes $(T^*\mathcal{U}, x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ en las cuales $\alpha_{(x,\xi)} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, dx_i$, entonces

$$\omega = -d\alpha = -d\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\, dx_i \right) = -\sum_{i=1}^{n} d\xi_i \wedge dx_i = \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge d\xi_i \,.$$

Ahora, tomamos un vector tangente arbitrario $v \in T_{(x,\xi)}M$ y lo descomponemos en

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} w_i \, \frac{\partial}{\partial \xi_i}.$$

Por lo tanto, si fijamos el v, obtenemos la siguiente 1-forma en $T_{(x,\xi)}M$

$$\omega_{(x,\xi)}(v,\cdot) = \sum_{i=1}^{n} v_i \, d\xi_i - \sum_{i=1}^{n} w_i \, dx_i \, .$$

Como el conjunto $\{dx_1, \ldots, dx_n, d\xi_1, \ldots, d\xi_n\}$ es una base de $T^*_{(x,\xi)}M$ entonces

$$\omega_{(x,\xi)}(v,\cdot) \equiv 0 \quad \text{ sí y solo sí } \quad v = 0 \, .$$

concluyendo que ω es no degenerada y por ende, simpléctica. □

2.3 Campo y flujo de Hamilton

Lema 2.3.1 (Gradiente simpléctico)**.** *Sea $H : U \subset X \to \mathbb{R}$ es una función C^r definida en un abierto de la variedad simpléctica (X, ω). Entonces existe un único campo vectorial $X_H : U \to TU$ de clase C^{r-1}, llamado el gradiente simpléctico de H, con la propiedad*

$$\omega_x\big(X_H(x), \cdot\big) = d_x H(\cdot) \, .$$

Demostración. Como el mapa $\tilde{\omega}_x : T_xX \to T^*_xX$ que asocia $v \mapsto \omega_x(v, \cdot)$ es un isomorfismo (probado en la proposición 2.2.3) entonces el vector $X_H(x)$ existe y es único. A su vez X_H es de la misma clase de regularidad que dH por lo tanto es C^{r-1}. □

Definición 2.3.2 (Flujo hamiltoniano)**.** *Sea $H : U \subset (X, \omega) \to \mathbb{R}$ un mapa de clase C^r. El campo $X_H : U \to TU$ dado por la propiedad*

$$\omega_x\big(X_H(x), \cdot\big) = d_x H(\cdot) \qquad \textit{para todo } x \in U$$

se lo denomina campo hamiltoniano*. En el caso que $r \geq 2$, este campo induce un flujo parcial (únicamente integrable) $\phi_t^H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times U \to X$ llamado* flujo hamiltoniano *de H.*

Una primera propiedad directa del flujo hamiltoniano es que preserva a la función que lo genera.

Proposición 2.3.3. *Sea $H : U \subset X \to \mathbb{R}$ una función C^2 y X_H su campo Hamiltoniano. Entonces H es constante en las órbitas del flujo hamiltoniano ϕ_t^H.*

Demostración. Alcanza con probar que $d_x H\big(X_H(x)\big) = 0$ para todo $x \in U$. Por definición

$$d_x H\big(X_H(x)\big) = \omega_x\big(X_H(x), X_H(x)\big) = 0$$

porque la forma simpléctica ω_x es antisimétrica para todo $x \in U$. □

2.3.1 Subespacios y subvariedades lagrangianas

Definición 2.3.4 (Subespacio lagrangiano)**.** *En un espacio vectorial simpléctico (E, ω) un subespacio F se dice lagrangiano si*

$$\dim(F) = \frac{1}{2}\dim(E)$$

y la forma simpléctica ω es idénticamente nula restricta a $F \times F$.

Los subespacios lagrangianos son, en cierta medida, maximales con respecto a anular la forma simpléctica ω.

Lema 2.3.5. *Sea F un subespacio lagrangiano de (E, ω) espacio vectorial simpléctico. Si $v \in E$ es tal que*

$$\omega(v, u) = 0 \quad \textit{para todo } u \in F \implies v \in F.$$

Demostración. Tomando $F^\perp = \{v \in E \mid \omega(v, u) = 0 \text{ para todo } u \in F\}$ el subespacio perpendicular a F, como el propio F es lagrangiano tenemos que $F \subset F^\perp$.

A su vez, el mapa $\tilde{\omega} : E \to E^*$ dado por $v \mapsto \omega(v, \cdot)$ es un isomorfismo (proposición 2.2.3) y la imagen de $\tilde{\omega}(F^\perp) = \left\{p \in E^* \mid p_{|F} = 0\right\}$ se puede identificar con $(E/F)^*$ por lo tanto tenemos que la dimensión

$$\dim\big(F^\perp\big) = \dim\big(\tilde{\omega}(F^\perp)\big) = \dim\big((E/F)^*\big) = \dim(E) - \dim(F) = \frac{1}{2}\dim(E) = \dim(F)$$

lo cual, sumado al hecho que $F \subset F^\perp$, implica que $F^\perp = F$. □

Definición 2.3.6 (Subvariedad lagrangiana)**.** *Sea (X, ω) una variedad simpléctica y $N \subset X$ una subvariedad. Decimos que N es una* subvariedad lagrangiana *si para todo $x \in N$ el espacio tangente $T_xN \subset (T_xX, \omega_x)$ es un subespacio lagrangiano.*

El siguiente teorema ilustra un posible comportamiento de las subvariedades lagrangianas respecto al flujo hamiltoniano en una variedad simpléctica.

Teorema 2.3.7 (Hamilton-Jacobi)**.** *Sea $H : U \subset (X, \omega) \to \mathbb{R}$ una función C^2 definida en un abierto de una variedad simpléctica. Entonces, una subvariedad lagrangiana $N \subset U$ es localmente invariante por el flujo hamiltoniano ϕ_t^H sí y solo sí H es constante en N.*

Demostración. Si N es invariante por el flujo ϕ_t^H entonces las curvas $\gamma(t) = \phi_t^H(x)$ con $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ tienen velocidad $X_H(x) \in T_xN$ en $t = 0$. Como N es lagrangiana, el diferencial de H en N cumple que

$$d_xH|_{T_xN} = \omega_x\big(X_H(x), \cdot\,\big)|_{T_xN} = 0$$

por lo cual la restricción de H a N es constante.

Recíprocamente, si H es constante en N entonces $d_xH|_{T_xN} = 0$ para todo $x \in N$. Esto equivale a que

$$\omega_x\big(X_H(x), v\big) = 0 \quad \text{ para todo } v \in T_xN$$

y por el lema 2.3.5, como T_xN es un subespacio lagrangiano entonces $X_H(x) \in T_xN$ para todo $x \in N$.

Con esto vemos que podemos restringir el campo X_H de clase C^1 a un campo en la subvariedad N, por la unicidad del teorema de Cauchy-Lipschitz, las soluciones de ϕ_t^H en N también son órbitas de ϕ_t^H en X y por lo tanto la subvariedad N es invariante por el flujo hamiltoniano en X. □

2.3.2 Hamiltonianos y Lagrangianos

En esta sección vinculamos langrangianos $L : TM \to \mathbb{R}$ definidos en una variedad diferenciable M, con mapas $H : T^*M \to \mathbb{R}$ cuyos flujos hamiltonianos van a ser conjugados al flujo de Euler-Lagrange mediante la transformada de Legendre, siempre y cuando L sea no degenerada.

Definición 2.3.8. *Si $L : TM \to \mathbb{R}$ es un lagrangiano de clase C^1 en la variedad M, se define el mapa $\hat{H} : TM \to \mathbb{R}$ como*

$$\hat{H}(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(v) - L(x, v)\,.$$

Proposición 2.3.9. *Sea L un lagrangiano de clase C^2 en la variedad M. Si $\gamma : [a, b] \to M$ es una curva extremal de clase C^2 de L, entonces el mapa $\hat{H} : TM \to \mathbb{R}$ es constante en la curva velocidad $(\gamma, \dot{\gamma}) : [a, b] \to TM$.*

En particular $\hat{H}$ es invariante por el flujo de Euler-Lagrange ϕ_t^L cuando este existe.

Demostración. Veamos en coordenadas que localmente el mapa $\hat{H}$ restricto a la curva $(\gamma, \dot{\gamma})$

$$\hat{H}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) = \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma}(t)\big) - L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$$

tiene derivada nula respecto al tiempo.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{H}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\right)\big(\dot{\gamma}(t)\big) + \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\ddot{\gamma}(t)\big) - \\
&- \frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\ddot{\gamma}(t)\big) - \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\big(\dot{\gamma}(t)\big) \\
&= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\right) - \frac{\partial L}{\partial x}\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)\right]\big(\dot{\gamma}(t)\big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

porque, al ser extremal de L, la curva velocidad $(\gamma, \dot{\gamma}) \in TM$ cumple las ecuaciones de Euler-Lagrange en cualquier sistema de coordenadas. Para completar la prueba recordamos que fue demostrado en el teorema 2.1.18, que si L es no degenerada, entonces existe el flujo de Euler-Lagrange ϕ_t^L y sus soluciones son curvas de la forma $(\gamma, \dot{\gamma})$ con $\gamma : [a, b] \to M$ una curva extremal. □

La intención es buscar un análogo del lagrangiano de una variedad M, en su fibrado cotangente T^*M donde tenemos una estructura simpléctica natural. Para eso precisamos que la transformada de Legendre asociada al lagrangiano, sea una buena correspondencia entre los fibrados TM y T^*M.

Definición 2.3.10 (Hamiltoniano)**.** *Sea un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ de clase C^2. Si la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ dada por $\mathcal{L}(x, v) = \left(x, \dfrac{\partial L}{\partial v}(x, v)\right)$ restricta a un abierto U de M es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces definimos el* hamiltoniano *asociado $H : \mathcal{L}(U) \subset T^*M \to \mathbb{R}$ como*

$$H = \hat{H} \circ \mathcal{L}^{-1}$$

$$H(x, p) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v_p)(v_p) - L(x, v_p)$$

donde v_p es el único vector de T_xM que cumple $\dfrac{\partial L}{\partial v}(x, v_p) = p \in T_x^*M$.

Proposición 2.3.11. *Sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano de clase C^k con $k \geq 2$. Si la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$ restricta a un abierto $U \subset M$ es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces el hamiltoniano $H = \hat{H} \circ \mathcal{L}^{-1}$ también es de clase C^k.*

Además, si U es un entorno coordenado, tomando en TU las coordenadas canónicas y en T^*U las coordenadas cotangentes, se tiene que

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x,p) = v$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,p) = -\frac{\partial L}{\partial x}(x,v)$$

donde $\mathcal{L}(x,v) = (x,p)$.

Demostración. En coordenadas tangentes $(x,v) = (x_1,\dots,x_n,v_1,\dots,v_n)$ con $v = \sum_i v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, y en coordenadas cotangentes $(x,p) = (x_1,\dots,x_n,\xi_1,\dots,\xi_n)$ con $p = \sum_i \xi_i\, dx_i$. Con lo cual

$$H\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) = \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)(v) - L(x,v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial v_i}(x,v)v_i - L(x,v)\,.$$

Diferenciando según v_j obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv_j} H\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial^2 L}{\partial v_i v_j}(x,v) + \frac{\partial L}{\partial v_j}(x,v) - \frac{\partial L}{\partial v_j}(x,v)\end{aligned}$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v) = \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v)\,. \qquad (\star)$$

Ahora bien, como la transformada de Legendre es un difeomorfismo sobre su imagen, entonces su diferencial es invertible, en las coordenadas que estamos usando este es

$$d_{(x,v)}\mathcal{L} = \begin{pmatrix} Id_{\mathbb{R}^n} & 0 \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial v \partial x}(x,v) & \dfrac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v) \end{pmatrix}$$

lo que implica que la matriz $\left(\dfrac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x,v)\right)_{ij}$ es invertible para todo $(x,v) \in U$. Juntando esto último con la ecuación $(\star)$ concluímos que

$$\frac{\partial H}{\partial p_j}\left(x, \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) = v_j \qquad \text{para todo } j = 1,\dots,n$$

como queríamos.

Para probar la otra igualdad pasamos a diferenciar según x_j:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_j}H\left(x,\frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right) &= \frac{\partial H}{\partial x_j}\left(x,\frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)+\sum_{i=1}^{n}\overbrace{\frac{\partial H}{\partial p_i}\left(x,\frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)}^{v_i}\frac{\partial^2 L}{\partial v_i\partial x_j}(x,v)\\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i\,\frac{\partial^2 L}{\partial v_i\partial x_j}(x,v)-\frac{\partial L}{\partial x_j}(x,v)\end{aligned}$$

y haciendo uso de la parte anterior hemos conseguimos probar que

$$\frac{\partial H}{\partial x_j}\left(x,\frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\right)=-\frac{\partial L}{\partial x_j}(x,v)\qquad\text{para todo } j=1,\dots,n\,.$$

Por último verificamos la regularidad de H. El lagrangiano de partida L es de clase C^k con $k\geq 2$, con lo cual la transformada de Legendre $\mathcal{L}$ es de clase C^{k-1}. Tomando un punto $(x,p)\in T^*U$ sabemos que existe (x,v_p) con $\mathcal{L}(x,v_p)=(x,p)$. Tenemos entonces que

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x,p)=\pi_v\left(\mathcal{L}^{-1}(x,p)\right)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)=-\frac{\partial L}{\partial x}\left(\mathcal{L}^{-1}(x,p)\right)$$

donde la función $\pi_v : TU\to\mathbb{R}^n$ de clase C^∞, es la proyección de los vectores $v\in T_xM$ en sus componentes canónicas. Entonces, por ser composición de funciones C^{k-1}, las derivadas parciales de H son de clase C^{k-1} y por lo tanto H es de clase C^k. □

Pasamos a usar la transformada de Legendre para transportar campos vectoriales de TM a T^*M, en particular, el campo de Euler-Lagrange.

Teorema 2.3.12. *Sea $L : TM\to\mathbb{R}$ un lagrangiano C^k, con $k\geq 2$, y supongamos que su transformada de Legendre $\mathcal{L}:TM\to T^*M$, restricta a un abierto $U\subset M$ es un difeomorfismo sobre su imagen, con lo cual L es no degenerada en U.*

Si se transporta a $\mathcal{L}(U)$, mediante $d\mathcal{L} : TTU\to TT^*U$, el campo de Euler-Lagrange X_L asociado al lagrangiano L, entonces este campo coincide con X_H, el campo hamiltoniano dado por la forma simpléctica canónica en T^*M, donde $H : T^*U\to\mathbb{R}$ es el hamiltoniano asociado a L.

Se tiene además que X_L es de clase C^{k-1}, y en particular, aún cuando $k=2$ el campo X_L es únicamente integrable y define un flujo parcial $\phi_t^L : (-\varepsilon,\varepsilon)\times U\to M$ de clase C^1 en U.

DEMOSTRACIÓN. Fijando un punto $(x,v) \in TU$, tomamos $p = \dfrac{\partial L}{\partial v}(x,v) \in T^*U$ cumpliendo que $\mathcal{L}(x,v) = (x,p)$. Como vimos en el teorema 2.1.18, el campo de Euler-Lagrange en un entorno coordenado se expresa como $X_L(x,v) = \big(x, v, v, \bar{X}_L(x,v)\big) \in TTM$, donde

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,v) = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)\big(\bar{X}_L(x,v),\ \cdot\ \big) + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x,v)(v,\ \cdot\ ).$$

Calculando su imagen por el diferencial de la transformada de Legendre, se obtiene lo siguiente

$$d_{(x,v)}\mathcal{L}\big(X_L(x,v)\big) = \left(x, p, v, \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x,v)\big(\bar{X}_L(x,v), \cdot\ \big) + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x,v)(v, \cdot\ )\right) = \left(x, p, v, \frac{\partial L}{\partial x}(x,v)\right).$$

Agregando a esto el resultado de la proposición anterior, podemos decir aún más

$$d_{(x,v)}\mathcal{L}\big(X_L(x,v)\big) = \left(x, p,\ \frac{\partial H}{\partial p}(x,p),\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x,p)\right) \in TT^*U.$$

Falta comprobar que ese es X_H, el campo hamiltoniano asociado a H, para eso calculamos la contracción del campo, por la forma simpléctica ω, en coordenadas cotangentes

$$\begin{aligned} \omega_{(x,p)}\left(d_{(x,v)}\mathcal{L}\big(X_L(x,v)\big),\ \cdot\ \right) &= \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i}\, dx_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\, dp_i \ =\ d_{(x,p)}H. \end{aligned}$$

Para concluir, sabemos por la proposición anterior que el hamiltoniano H es de clase C^k, por ende el campo hamiltoniano es de clase C^{k-1} y su flujo ϕ_t^H también. Por otro lado el difeomorfismo $\mathcal{L}|_U$ es de clase C^{k-1} y manda al campo X_L en X_H, consecuentemente el flujo local de $X_L|_U$ coincide con $\mathcal{L}^{-1} \circ \phi_t^H \circ \mathcal{L}$ que es de clase C^{k-1}. □

Una última observación para cerrar esta sección, cuando el lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ es no degenerado de clase C^r, con $r \geq 2$, sabemos (proposición 2.1.1) que la transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to (T^*M, \omega)$ es un difeomorfismo local. Entonces podemos hacer el pullback de la forma simpléctica ω, a una 2-forma no degenerada $\mathcal{L}^*\omega$ en TM. Para poder decir que es cerrada requerimos que L sea por lo menos de clase C^3, y en ese caso $(TM, \mathcal{L}^*\omega)$ es una variedad simpléctica.

Con esto podemos interpretar el campo X_L como el campo hamiltoniano asociado a la función $\hat{H}$ en $(TM, \mathcal{L}^*\omega)$. De esta forma, el resultado de la invariancia de la función $\hat{H}$ mediante el flujo

de X_L (proposición 2.3.9) se desprende de la invariancia de una función en su flujo hamiltoniano, probada en la proposición 2.3.3.

Sin embargo, no podemos obtener los mismos resultados de regularidad del flujo de Euler-Lagrange obtenidos en esta sección, porque $\hat{H}$ es de clase C^{r-1} cuando H es de clase C^r.

Capítulo 3

Métrica de Jacobi-Maupertuis

Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión n. Dado un potencial $V : M \to \mathbb{R}$ de clase C^∞, tomamos un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$ definido por

$$L(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(x)\,.$$

La energía $E : TM \to \mathbb{R}$ asociada a este lagrangiano es una cantidad que se conserva en las curvas extremales, y está dada por

$$E(x, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + V(x)\,.$$

Su hamiltoniano $E : T^*M \to \mathbb{R}$ es

$$H(x, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + V(x)$$

donde $\| p \|$ es la norma dual en el fibrado contangente, es decir, $\| p \| = \| v \|$ donde $v \in T_xM$ es el único vector tal que $p(u) = \langle v, u \rangle$ para todo $u \in T_xM$.

La transformada de Legendre $\mathcal{L} : TM \to T^*M$

$$\mathcal{L}(x, v) = (x, p_v)$$

donde $p_v \in T_x^*M$ está definido por $p_v(u) = \langle v, u \rangle$

Observación. Este tipo de Lagrangiano es simétrico en las fibras, para todo $(x, v) \in TM$ se cumple que $L(x, v) = L(x, -v)$. Esto implica que si una curva $\gamma : [a, b] \to M$ es extremal entonces la curva $-\gamma : [-b, -a] \to M$, dada por $-\gamma(t) = \gamma(-t)$ tiene la misma acción que γ y también es extremal.

Construcción de la métrica de Jacobi-Maupertuis

Dada una curva diferenciable $\gamma : [a,b] \to M$, tenemos que la acción del lagrangiano es

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big)\, dt = \int_a^b \frac{1}{2} \parallel \dot\gamma(t) \parallel^2 - V\big(\gamma(t)\big)\, dt\,.$$

Dado un $h \in \mathbb{R}$ calculamos la acción del lagrangiano $L + h$,

$$\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) = \int_a^b L\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) + h\, dt = \int_a^b \frac{1}{2} \parallel \dot\gamma(t) \parallel^2 + h - V\big(\gamma(t)\big)\, dt\,.$$

Ahora vamos a usar una propiedad elemental: si A y B son dos números reales, se cumple que $(A-B)^2 \geq 0$ y esto implica que $A^2 + B^2 \geq 2AB$, con igualdad sí y solo sí $A = B$. Para usar esto suponemos que $h - V\big(\gamma(t)\big) \geq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Tomando

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \parallel \dot\gamma(t) \parallel \quad \text{y} \quad B(t) = \big[\, h - V\big(\gamma(t)\big)\big]^{\frac{1}{2}}$$

para cada $t \in [a,b]$, entonces

$$A(t)^2 + B(t)^2 = \frac{1}{2}\|\dot\gamma(t)\|^2 + h - V\big(\gamma(t)\big) \;\; \geq \;\; \big[2\big(\, h - V\big(\gamma(t)\big)\,\big)\big]^{\frac{1}{2}} \, \parallel \dot\gamma(t) \parallel = 2A(t)B(t)$$

integrando en $[a,b]$ se mantiene la desigualdad

$$\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{2}\|\dot\gamma(t)\|^2 + h - V\big(\gamma(t)\big)\, dt \;\geq\; \int_a^b \big[2\big(\, h - V\big(\gamma(t)\big)\big)\big]^{\frac{1}{2}} \, \parallel \dot\gamma(t) \parallel \, dt \qquad (1)$$

dándose la igualdad sí y solo sí

$$\|\dot\gamma(t)\| = \big[2\big(\, h - V\big(\gamma(t)\big)\big)\big]^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, t \in [a,b]\,.$$

El lado derecho de la ecuación (1) nos sugiere tomar una nueva métrica riemanniana que haga que esa integral sea la longitud de la curva γ. Para eso tenemos que restringirnos al subconjunto $V_h = \{x \in M \,/\, h - V(x) > 0\}$ el cual es un abierto de M porque V es continua.

Definición 3.0.1 (Métrica de Jacobi)**.** *Sea (M,g) una variedad riemanniana y $V : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Dado un $h \in \mathbb{R}$, en el abierto $V_h = \{x \in M \,/\, h > V(x)\}$ se define una nueva métrica riemanniana g_J dada por*

$$g_J = 2(h - V) \cdot g$$

llamada la métrica de Jacobi *con energía h. Es decir, para todo $x \in V_h$ y todo par de vectores $(u,v) \in T_xM$, se tiene que*

$$\langle\, u, v \,\rangle_{g_J} = 2\big(h - V(x)\big)\, \langle\, u, v \,\rangle_g\,.$$

En lo que sigue, fijamos una energía $h > \min_M V$ y tomamos la métrica g_J asociada en V_h.

Llamamos $\ell_J(\gamma)$ a la longitud de una curva $\gamma : [a,b] \to V_h$ en esta nueva métrica, donde

$$\ell_J(\gamma) = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|_{g_J}\, dt = \int_a^b \big[2\big(h - V\big(\gamma(t)\big)\big)\big]^{\frac{1}{2}}\, \|\,\dot\gamma(t)\,\|_g\, dt\,. \tag{2}$$

Proposición 3.0.2. *Sea $\gamma : [a,b] \to M$ una curva diferenciable. Si el segmento de curva $\gamma([a,b])$ está incluído en V_h, entonces*

$$\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) \geq \ell_J(\gamma)\,.$$

La igualdad se cumple sí y solo sí la curva $(\gamma, \dot\gamma) \in TM$ está incluída en el nivel de energía h del lagrangiano.

Demostración. Que $\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) \geq \ell_J(\gamma)$ proviene de las ecuaciones (1) y (2). La igualdad se da si

$$\|\,\dot\gamma(t)\,\| = \big[2\big(h - V\big(\gamma(t)\big)\big)\big]^{\frac{1}{2}}$$

para todo $t \in [a,b]$. Esto equivale a que la energía de la curva

$$E\big(\gamma(t), \dot\gamma(t)\big) = \frac{1}{2}\,\|\,\dot\gamma(t)\,\|^2 + V\big(\gamma(t)\big) = h$$

para todo $t \in [a,b]$. □

3.1 Reparametrizaciones a un nivel de energía dado

Como el caso de que una curva tenga energía constante es importante, vemos que siempre se puede reparametrizar una curva para lograrlo.

Proposición 3.1.1. *Sea $L(x,v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - V(x)$ un lagrangiano en (M,g), con $V : M \to \mathbb{R}$ un mapa diferenciable. Dado $h \in \mathbb{R}$ y una curva $\gamma : [a,b] \to V_h$ de clase C^1, tal que $\dot\gamma(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$, entonces existe una reparametrización $\tilde\gamma : [c,d] \to V_h$ con energía constante e igual a h.*

Demostración. Vamos a ver que existe $\phi : [0,T] \to [a,b]$ un difeomorfismo de clase C^1 con $\dot\phi(t) > 0$ para todo $t \in [0,T]$, tal que $\tilde\gamma : [0,T] \to V_h$ dada por $\tilde\gamma(t) = \gamma\big(\phi(t)\big)$ tiene energía constante h.

En primer lugar calculamos la derivada de $\tilde{\gamma}(t) = \gamma\big(\phi(t)\big)$:

$$\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\phi}(t)\,\dot{\gamma}\big(\phi(t)\big)\,.$$

Igualando la energía de $\tilde{\gamma}(t)$ a h, obtenemos

$$E\left(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\right) = \frac{1}{2}\dot{\phi}(t)^2 \,\left\|\,\dot{\gamma}\big(\phi(t)\big)\,\right\|^2 + V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big) = h\,.$$

Como $h - V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big) > 0$ para todo $t \in [0,T]$, separamos variables de la siguiente manera

$$\frac{\dot{\phi}(t)^2 \,\left\|\,\dot{\gamma}\big(\phi(t)\big)\,\right\|^2}{2\big[\,h - V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big)\big]} = 1$$

y como queremos que $\dot{\phi}(t) > 0$ tomamos la raíz positiva

$$\frac{\dot{\phi}(t)\,\left\|\,\dot{\gamma}\big(\phi(t)\big)\,\right\|}{\big[2\big(\,h - V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\big)\,\big)\big]^{\frac{1}{2}}} = 1\,.$$

Luego integramos ambos lados entre 0 y t

$$\int_0^t \frac{\dot{\phi}(s)\,\left\|\,\dot{\gamma}\big(\phi(s)\big)\,\right\|}{\big[2\big(\,h - V\big(\gamma\big(\phi(s)\big)\big)\,\big)\big]^{\frac{1}{2}}}\,ds = t\,.$$

Haciendo el cambio de variables $u = \phi(s)$ obtenemos

$$\int_a^{\phi(t)} \frac{\|\,\dot{\gamma}(u)\,\|}{\big[2\big(\,h - V\big(\gamma(u)\big)\,\big)\big]^{\frac{1}{2}}}\,du = t\,.$$

Como estamos suponiendo que $h - V\big(\gamma\big(\phi(t)\big)\,\big) > 0$ y $\dot{\gamma}(t)$ es continua y no nula para todo $t \in [0,T]$, entonces la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(u) = \frac{\|\,\dot{\gamma}(u)\,\|}{\big[2\big(\,h - V\big(\gamma(u)\big)\,\big)\big]^{\frac{1}{2}}}$$

es continua y positiva. Tomamos $F : [a,b] \to [0,T]$ una primitiva de f. Por lo anterior sabemos que F es de clase C^1 y tiene derivada positiva en todo el intervalo, entonces es invertible. Con esto vemos que

$$t = \int_a^{\phi(t)} \frac{\|\,\dot{\gamma}(u)\,\|}{\big[2\big(\,h - V\big(\gamma(u)\big)\,\big)\big]^{\frac{1}{2}}}\,du = F\big(\phi(t)\big) - F(a)\,.$$

Concluímos que definiendo $\phi : [0,T] \to [a,b]$ de la siguiente forma

$$\phi(t) = F^{-1}\big(t + F(a)\big)$$

cumple que $\dot{\phi}(t) > 0$ para todo $t \in [0,T]$ y la curva $\tilde{\gamma}(t) = \gamma\big(\phi(t)\big)$, reparametrización de γ, tiene energía constante $E\left(\tilde{\gamma}(t), \dot{\tilde{\gamma}}(t)\right) = h$. □

3.2 Geodésicas minimizantes de la métrica de Jacobi

3.2.1 Curvas absolutamente continuas y minimizantes a tiempo libre

Vamos a relacionar las geodésicas de la métrica de Jacobi con las curvas minimizantes a tiempo libre de la acción $L + h$. Para eso, primero algunas definiciones.

Definición 3.2.1 (Curvas absolutamente continuas)**.** *Sea una curva $\gamma : [a, b] \to (M, d)$ un espacio métrico. Decimos que γ es absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier familia $(a_i, b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de intervalos de disjuntos de $[a, b]$ tales que*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} b_i - a_i < \delta$$

se cumple que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} d\big(\gamma(b_i), \gamma(a_i)\big) < \varepsilon.$$

Es claro que las curvas absolutamente continuas son uniformemente continuas. Se usan en la teoría desarrollada por Tonelli para probar la existencia de curvas extremales minimizantes de la acción de L. Donde los lagrangianos que se toman son los llamados de Tonelli, que son convexos en las fibras, de clase C^2 y superlineales sobre compactos de M.

El siguiente teorema sin demostración (consultar [BGH98, Teorema 2.17]) muestra por qué las curvas absolutamente sirven como conjunto sobre el cual tomar la ación del lagrangiano.

Teorema 3.2.2. *Una curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ es absolutamente continua sí y solo sí se cumplen las siguientes condiciones:*

(1) La derivada $\dot\gamma(t)$ existe en casi todo punto de $[a, b]$.

(2) La derivada $\dot\gamma$ es integrable Lebesgue en $[a, b]$.

(3) Para cada $t \in [a, b]$ se tiene que $\gamma(t) - \gamma(a) = \int_a^t \dot\gamma(s)\, ds$.

Definición 3.2.3. *Sean $x, y \in M$ dos puntos cualquiera y $\tau > 0$ un tiempo positivo. Al conjunto de curvas absolutamente continuas que unen x e y en tiempo τ, lo llamamos*

$$\mathcal{C}(x, y, \tau) = \{\gamma : [a, b] \to M \text{ absolutamente continua } \mid \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y,\ b - a = \tau\}.$$

También llamamos

$$\mathcal{C}(x,y) = \bigcup_{\tau>0} \mathcal{C}(x,y,\tau)$$

al conjunto de curvas absolutamente continuas que unen dos elementos de M sin restricción en el intervalo de tiempo en que están definidas.

Volviendo al caso de una variedad riemanniana M y un lagrangiano $L : TM \to \mathbb{R}$, en la búsqueda de mínimos de la acción se definen las siguientes funciones

Definición 3.2.4. *Sea $\phi : M \times M \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\phi(x,y,\tau) = \inf\{\mathbb{A}_L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x,y,\tau)\}$$

junto con

$$\phi(x,y) = \inf_{\tau>0} \phi(x,y,\tau) = \inf\{\mathbb{A}_L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x,y)\}$$

el llamado potencial crítico de Mañé *o también llamado* potencial de acción crítica.

Con esta notación vemos que una curva $\gamma : [0,\tau] \to M$ minimiza la acción si

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi\big(\gamma(0), \gamma(\tau), \tau\big).$$

Donde se está minimizando entre las curvas definidas en el mismo tiempo que γ.

Definición 3.2.5 (Minimizante a tiempo libre)**.** *Una curva absolutamente continua $\gamma : J \to M$ definida en un intervalo $J \subset \mathbb{R}$ es* minimizante a tiempo libre *si*

$$\mathbb{A}_L\left(\gamma|_{[a,b]}\right) = \phi\big(\gamma(a), \gamma(b)\big)$$

para todo subintervalo compacto $[a,b] \subset J$.

3.2.2 Propiedades de las minimizantes a tiempo libre en la métrica de Jacobi

Suponiendo la existencia de minimizantes a tiempo libre (que aclararemos en el siguiente capítulo) vemos que rol juegan en la variedad (V_h, g_J) correspondiente al nivel de energía h con la métrica de Jacobi.

Empezamos con un lema que nos será de mucha utilidad en lo que sigue.

Lema 3.2.6. *Si $\gamma : [0,T] \to V_h$ es una curva diferenciable, minimizante a tiempo libre de $\mathbb{A}_{L+h}$ para algún $h \in \mathbb{R}$, entonces es extremal de L y $E\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) = h$ para todo $t \in [0,T]$.*

Demostración. Sea $\sigma \in \mathcal{C}\big(\gamma(0), \gamma(T), T\big)$.Como

$$\mathbb{A}_{L+h}(\sigma) = \int_0^T L\big(\sigma(t), \dot{\sigma}(t)\big) + h\, dt = A_L(\sigma) + hT\,.$$

Tenemos que la desigualdad $\mathbb{A}_{L+h}(\sigma) \geq \mathbb{A}_{L+h}(\gamma)$ equivale a

$$\mathbb{A}_L(\sigma) + hT \geq \mathbb{A}_L(\gamma) + hT$$

que implica la minimización de $\mathbb{A}_L$ de la curva γ

$$\mathbb{A}_L(\sigma) \geq \mathbb{A}_L(\gamma)\,.$$

Al ser γ una minimizante de la acción de L, por el corolario 2.1.13, es una extremal. A su vez, por ser extremal sabemos que la curva $(\gamma, \dot{\gamma})$ tiene energía constante. La proposición 3.0.2 dice que

$$\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) \geq \ell_J(\gamma)$$

con igualdad sí y solo sí $(\gamma, \dot{\gamma})$ está en el nivel de energía h del lagrangiano. Si γ no estuviera en el nivel h, por la proposición 3.1.1 se podría reparametrizar a una curva con los mismos extremos y con acción $\mathbb{A}_{L+h}$ menor, contradiciendo que γ sea minimizante a tiempo libre.

□

El siguiente teorema muestra la relación que hay entre las geodésicas minimizantes de la métrica de Jacobi y las extremales de L.

Teorema 3.2.7. *Sea (M,g) una variedad riemanniana y sea $L : TM \to \mathbb{R}$ un lagrangiano dado por $L(x,v) : \frac{1}{2} \parallel v \parallel^2 - V(x)$ con $V : M \to \mathbb{R}$ un mapa diferenciable. Dado un $h \in \mathbb{R}$, sea $V_h = \{x \in M \,/\, h - V(x) > 0\}$ abierto de M.*

(a) *Si $\gamma : [a,b] \to V_h$ es una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi y se reparametriza a una curva $\tilde{\gamma} : [0,T] \to V_h$ con energía h constante, entonces $\tilde{\gamma}$ es una minimizante a tiempo libre de $\mathbb{A}_{L+h}$.*

(b) *Recíprocamente, dada* $\gamma : [0,T] \to M$ *una curva minimizante de* $\mathbb{A}_L$*, si es una minimizante a tiempo libre de* $\mathbb{A}_{L+h}$ *con* $h = E\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big)$*, entonces* γ *admite una reparametri-zación* $\tilde{\gamma}$*, a una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi.*

Demostración. (*a*) Sea $\sigma \in \mathcal{C}\big(\gamma(a), \gamma(b), b-a\big)$ por la proposición 3.0.2 tenemos que

$$\mathbb{A}_{L+h}(\sigma) \geq \ell_J(\sigma).$$

Como estamos suponiendo que γ es geodésica minimizante de g_J y tiene los mismos extremos que σ, entonces su longitud va a ser menor o igual, es decir

$$\ell_J(\sigma) \geq \ell_J(\gamma).$$

Recordar que $\ell_J(\tilde{\gamma}) = \ell_J(\gamma)$ porque una reparametrización no cambia la longitud. A su vez, como $(\tilde{\gamma}, \dot{\tilde{\gamma}})$ está en el nivel de energía h, por la proposición 3.0.2, se cumple que

$$\ell_J(\tilde{\gamma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\gamma}).$$

Juntando estas desigualdades obtuvimos que

$$\mathbb{A}_{L+h}(\sigma) \geq \ell_J(\sigma) \geq \ell_J(\gamma) = \ell_J(\tilde{\gamma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\gamma})\,.$$

Con lo que la acción de $L+h$ de la curva $\tilde{\gamma}$ es menor a la acción de cualquier otra curva σ con los mismos extremos y a tiempo libre. Entonces $\tilde{\gamma} : [0,T] \to M$, la reparametrización a energía h de una geodésica minimizante de g_J, es minimizante a tiempo libre de la acción de $L+h$.

(b) Para ver la prueba del recíproco primero recordamos que, si $\gamma : [0,T] \to M$ es una minimizante a tiempo libre de $\mathbb{A}_{L+h}$ entonces, por el lema 3.2.6, tiene energía constante h. Por la proposición 3.0.2 sabemos que $\mathbb{A}_{L+h}(\gamma) = \ell_J(\gamma)$.

Sea $\sigma \in \mathcal{C}\big(\gamma(0), \gamma(T), T\big)$ una curva diferenciable arbitraria con los mismos extremos que γ. Sea $\tilde{\sigma} : [0,T'] \to V_h$ su reparametrización a energía h, nuevamente por la proposición 3.0.2 tenemos que $\ell_J(\sigma) = \ell_J(\tilde{\sigma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\sigma})$.

Comparemos las longitudes de σ y γ, dos curvas en V_h con los mismos extremos:

$$\ell_J(\sigma) = \ell_J(\tilde{\sigma}) = \mathbb{A}_{L+h}(\tilde{\sigma}) \geq \mathbb{A}_{L+h}(\gamma) = \ell_J(\gamma)\,.$$

Con lo cual

$$\ell_J(\sigma) \geq \ell_J(\gamma)\,.$$

Entonces la curva $\gamma : [0,T] \to V_h$ minimiza la distancia entre sus extremos en la métrica de Jacobi. Es más, esto implica que minimiza la distancia entre cualquier par de puntos de su imagen, lo que significa que se puede reparametrizar a una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi. □

3.3 Rayos geodésicos

Los rayos geodésicos son análogos riemannianos de semi-rectas y no son compatibles con variedades compactas, por lo que, en lo que sigue se trabajará con variedades completas no compactas. En esta sección vemos sus características básicas para luego usarlas en la construcción de las funciones de Busemann.

Definición 3.3.1. (a) *Una geodésica $\gamma : I \to (M,g)$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo abierto, es una geodésica minimizante si $\forall\ [a,b] \subset I$ la restricción $\gamma|_{[a,b]}$ minimiza la distancia entre $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.*

(b) *Un rayo geodésico en una variedad riemanniana (M,g) es una geodésica minimizante $\gamma : [0,+\infty) \to M$ parametrizada por su longitud de arco.*

Los rayos cumplen que la distancia entre cualquier par de puntos de su imagen es

$$d\big(\gamma(t_1),\gamma(t_2)\big) = \ell\big(\gamma|_{[t_1,t2]}\big) = t_2 - t_1$$

donde se asume que $0 \leq t_1 < t_2$.

La siguiente proposición muestra que la compacidad no es compatible con la existencia de rayos.

Proposición 3.3.2. *Sea (M,g) una variedad riemanniana completa. Son equivalentes:*

(a) *M es compacta.*

(b) *M no admite rayos geodésicos.*

Demostración. [(a) $\implies$ (b)] Dado un punto cualquiera $x_0 \in M$ la función distancia a ese punto $d_{x_0} : M \to \mathbb{R}$ es continua. Por ser M compacto la función d_{x_0} tiene máximo, esto implica que toda geodésica minimizante, parametrizada por longitud de arco, que parta de x_0 tiene longitud menor o igual a ese máximo, por lo tanto no puede ser un rayo.

[$\neg$(a) $\implies$ $\neg$(b)] Probaremos que si la variedad (M, g) es completa no compacta entonces admite rayos geodésicos. El teorema de Hopf-Rinow (ver por ejemplo [doCar79, p. 120]) nos dice que por ser no compacta, existe una sucesión $\{q_n\}$ de puntos tales que para cualquier $p \in M$

$$\lim_{n\to+\infty} d(q_n, p) = +\infty\,.$$

El teorema también dice que existen geodésicas minimizantes entre dos puntos cualquiera de la variedad.

Fijando un $p \in M$ y una sucesión $\{q_n\}$ como arriba, tomamos curvas geodésicas minimizantes $\gamma_n : [0, d(q_n, p)] \to M$ parametrizadas por longitud de arco que unen p con q_n. Estas son dadas por el mapa exponencial en p

$$\gamma_n(t) = exp_p(t\, v_n)$$

donde los vectores $v_n = \dot\gamma_n(0) \in T_pM$ tienen norma unitaria. Al estar en una esfera podemos extraer una subsucesión convergente de vectores unitarios $\{v_{n_k}\} \to v_\infty \in T_pM$, sin perder generalidad asumimos que la sucesión original $\{v_n\} \to v_\infty$.

Sea $\gamma_\infty : [0, +\infty) \to M$ la geodésica que parte de p con velocidad v_∞, dada por

$$\gamma_\infty(t) = exp_p(t\, v_\infty)\,.$$

Queremos ver que es un rayo y para eso probamos que minimiza la distancia entre $p = \gamma_\infty(0)$ y cualquier punto intermedio $\gamma_\infty(t)$.

Como las geodésicas γ_n tienen longitud $d(q_n, p) \to +\infty$, para cualquier $t > 0$ existe un $K > 0$ tal que las curva γ_n están definidas en t para todo $n > K$. A su vez, como el mapa exponencial es continuo, se cumple que para $n > K$

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n(t) = \lim_{n\to+\infty} exp_p(t\, v_n) = exp_p(t\, v_\infty) = \gamma_\infty(t)\,.$$

El mapa $d_p : M \to \mathbb{R}$, distancia al punto p, también es continuo y como $d_p\big(\gamma_n(t)\big) = t$ para todo $n > k$ se tiene que

$$d_p\big(\gamma_\infty(t)\big) = \lim_{n\to+\infty} d_p\big(\gamma_n(t)\big) = t = \ell\big(\gamma_\infty|_{[0,t]}\big)$$

y por ende γ_∞ es un rayo geodésico. □

3.4 Funciones de Busemann

En esta sección presentamos las funciones de Busemann, desarrolladas por Herbert Busemann a mediados del siglo XX. Él se interesó en ver que propiedades de la geometría riemanniana se podían generalizar a espacios sin una estructura diferencial, en los cuales utilizó como noción de geodésica las curvas que minimizan la distancia. Para dar un ejemplo de como se menajaba sin conceptos diferenciables, definió la curvatura negativa de un espacio mediante una comparación de la longitud de la paralela media de un triángulo geodésico (donde geodésico significa compuesto de curvas que minimizan la distancia), siendo de curvatura negativa si esa longitud es menor a la mitad de la longitud del cateto paralelo. Para un tratamiento más profundo del tema sugerimos la lectura de [Pap05], [Gro07] y [Bus05].

En esta sección primero miramos primero un caso más general en espacios métricos, para luego enfocarnos en el caso de (M, g) una variedad riemanniana con su distancia asociada.

3.4.1 Construcción general en un espacio métrico

Sea (M, d) un espacio métrico. Dado un punto $x \in M$, se define la función distancia al punto

$$d_x : M \to \mathbb{R}$$
$$y \mapsto d(y, x)$$

Por la desigualdad triangular, si $y, z \in M$ entonces $d_x(y) - d_x(z) \leq d(y, z)$ e intercambiando y con z obtenemos que

$$|\, d_x(y) - d_x(z) \,| \leq d(y, z) \text{ con igualdad sii } z = y \text{ ó } z = x\,. \qquad (\circledast)$$

Entonces la función d_x es 1-lipschitz para todo $x \in M$ y en particular es continua. Definimos el mapa B que a cada punto de M le asocia la función distancia a ese punto.

$$B : M \to C(M, \mathbb{R})$$
$$x \mapsto d_x$$

En el espacio $C(M,\mathbb{R})$, de funciones continuas de M a $\mathbb{R}$, tomamos la topología de convergencia uniforme en compactos: dado un compacto $K \subset M$, la métrica del supremo en él es la función $d_\infty^K : C(K,\mathbb{R}) \times C(K,\mathbb{R}) \to [0,+\infty)$ que a cada par de funciones $f, g \in C(K,\mathbb{R})$ asocia el valor

$$d_\infty^K(f,g) = \sup_{x\in K} | f(x) - g(x) | < +\infty.$$

Una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de M en $\mathbb{R}$, converge uniformemente en compactos a una función f si

$$\lim_{n\to\infty} d_\infty^K(f_n, f) = 0$$

para todo $K \subset M$ compacto. Como la convergencia uniforme preserva la continuidad, si las funciones f_n son continuas para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces la función límite f también lo será.

Ahora, fijemos un punto cualquiera x_0 del espacio métrico (M,d) y para cada $x \in M$ consideremos la función $B_x : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$B_x(z) = d_x(z) - d_x(x_0).$$

Observar que para todo $x \in M$ se cumple que

(a) $B_x \in C(M,\mathbb{R})$.

(b) $B_x(x_0) = 0$.

(c) B_x es 1-lipschitz.

El hecho que todas las B_x sean lipschitz con la misma constante implica que la familia de funciones $\{B_x\}_{x\in M}$ es equicontinua. Esto nos remite a una versión del teorema de Ascoli-Arzelà para espacios regulares y localmente compactos extraída de [Kel75, p. 233].

Teorema 3.4.1 (Ascoli-Arzelà)**.** *Sea M un espacio topológico regular y localmente compacto. Sea $\mathcal{F} \subset C(M,Y)$ una familia de funciones continuas sobre un espacio métrico Y. Si consideramos al espacio $C(M,Y)$ con la topología de convergencia uniforme en compactos, entonces el conjunto $\mathcal{F}$ tiene clausura compacta sí y solo sí*

1. *La familia $\mathcal{F}$ es equicontinua.*

2. *Las imágenes $\mathcal{F}(x) = \{f(x) \mid f \in \mathcal{F}\} \subset Y$ tienen clausura compacta para todo $x \in M$.*

Para aplicar el teorema resta ver que el conjunto $\{B_x(z)\}_{x\in M}$ es acotado en $\mathbb{R}$ para todo $z \in M$:

$$|\, B_x(z)\,| = |\, d(x,z) - d(x,x_0)\,| \leq d(z,x_0) \quad \text{para todo } x \in M.$$

por la desigualdad ($\circledast$) probada más arriba. Entonces vale el teorema de Ascoli-Arzelà y usando la compacidad secuencial del conjunto $\{B_x\}_{x\in M}$ extraemos el siguiente corolario.

Corolario 3.4.2. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en M y $x_0 \in M$ un punto cualquiera. Entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{n_k\in\mathbb{N}}$ tal que las funciones*

$$B_{x_{n_k}} = d_{x_{n_k}} - \ d_{x_{n_k}}(x_0)$$

convergen uniformemente en compactos a una función $b_\infty \in C(M,\mathbb{R})$.

A una tal función b_∞ definida como en el corolario anterior, la llamamos *función de busemann* asociada a la sucesión $\{x_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Notar que a partir de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en principio puede haber varias subsucesiones con funciones de busemann distintas.

3.4.2 Caso riemanniano

Consideramos una variedad riemanniana (M,g) completa no compacta y munida de su distancia riemanniana d. Sea $\gamma : [0,+\infty) \to M$ un rayo geodésico parametrizado por longitud de arco. Esta geodésica minimiza la distancia riemanniana entre cualquier par de puntos de su imagen, y se tiene que

$$d\big(\gamma(t_1),\gamma(t_2)\big) = \ell\left(\gamma|_{[\,t_1,t_2]}\right) = t_2 - t_1 \ \text{ para todo par de tiempos } t_2 \geq t_1 \geq 0\,.$$

Llamamos $x_0 = \gamma(0)$ al origen de la curva, entonces se cumple que la distancia de cualquier punto intermedio $\gamma(t)$ a x_0 es

$$d\big(\gamma(t),x_0\big) = \ell\left(\gamma|_{[\,0,t]}\right) = t\,.$$

Tomando a $x_0 = \gamma(0)$ como punto fijo y (acorde a como hicimos en la sección anterior) definimos la familia de funciones $\big\{B_{\gamma(t)} \mid t \in [0,+\infty)\big\} \subset C(M,\mathbb{R})$ dadas en cada $z \in M$ por

$$B_{\gamma(t)}(z) = d\big(\gamma(t),z\big) - t.$$

Veamos como se comporta la familia $\{B_{\gamma(t)}\}$ en un punto cualquiera $z \in M$:

Sean dos tiempos positivos $t_2 > t_1 > 0$, por la desigualdad triangular se cumple que

$$\begin{aligned} d\big(\gamma(t_2), z\big) - d\big(\gamma(t_1), z\big) &\leq \overbrace{d\big(\gamma(t_2), \gamma(t_1)\big)}^{t_2 - t_1} \\ d\big(\gamma(t_2), z\big) - t_2 &\leq d\big(\gamma(t_1), z\big) - t_1 \\ B_{\gamma(t_2)}(z) &\leq B_{\gamma(t_1)}(z) \end{aligned}$$

con igualdad sii $z = \gamma(t_1)$. Entonces si se fija el z, la función del tiempo

$$\begin{aligned} B_{\gamma(\cdot)}(z) : [0, +\infty) &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto d\big(\gamma(t), z\big) - t \end{aligned}$$

es monótona decreciente, por lo cual existe el límite de $B_{\gamma(t)}(z)$ cuando t tiende a infinito para todo $z \in M$. Como además para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\big|\, B_{\gamma(t)}(z) \,\big| = \big|\, d\big(\gamma(t), z\big) - t \,\big| = \big|\, d\big(\gamma(t), z\big) - d\big(\gamma(t), x_0\big) \,\big| \leq d(z, x_0)$$

entonces el límite es finito y podemos decir aún más sobre la convergencia.

Teorema 3.4.3. *Sea (M, g) una variedad riemanniana completa no compacta, y sea $\gamma : [0, +\infty) \to M$ un rayo geodésico. Las funciones $\big\{B_{\gamma(t)} \mid t \in [0, +\infty)\big\} \subset C(M, \mathbb{R})$ dadas por*

$$B_{\gamma(t)}(z) = d_{\gamma(t)}(z) - t$$

convergen uniformemente en compactos, cuando t tiende a infinito, a la función continua

$$\begin{aligned} b_\gamma : M &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto \lim_{t \to +\infty} \big[d\big(\gamma(t), z\big) - t\big]\,. \end{aligned}$$

Demostración. Ya vimos que existe y es finito el límite

$$\lim_{t \to +\infty} B_{\gamma(t)}(z) = b_\gamma(z) \qquad \text{para todo } z \in M.$$

Aplicando el corolario 3.4.2 se obtiene que las funciones $B_{\gamma(t)} \in C(M, \mathbb{R})$ convergen uniformemente en compactos a b_γ la cual, por lo tanto, es continua. □

A las funciones b_γ las llamamos funciones de busemann asociadas al rayo geodésico γ.

En el corolario 3.4.2 vimos que solo precisamos de una sucesión $\{x_n\} \subset M$ para obtener funciones de busemann, en el siguiente lema, vemos como en el caso riemanniano, partiendo de una sucesión se la vincula a un rayo geodésico con la misma función de busemann asociada.

Lema 3.4.4. *Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ una sucesión y x_0 un punto arbitrario de M.*

(a) *Si $\lim_n d(x_n, x_0) = +\infty$ entonces para toda función de busemann $b_\infty : M \to \mathbb{R}$ asociada a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con origen en x_0, existe un rayo geodésico $\gamma : [0, +\infty) \to M$ que parte de x_0, tal que la función de busemann b_γ del rayo coincide con b_∞.*

(b) *Si la sucesión $\{x_n\}$ tiende a un punto $x_\infty \in M$ entonces su función de busemann es*

$$B_{x_\infty} = d_{x_\infty} - d_{x_\infty}(x_0)\,.$$

Demostración. (a) Como la variedad es completa, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos una geodésica minimizante $\gamma_n : [0, d(x_n, x_0)] \to M$ parametrizada por longitud de arco, uniendo x_0 con x_n. Consideramos el conjunto de los vectores unitarios $\{\dot\gamma_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}} \in T_{x_0}M$, como está incluído en el conjunto de vectores unitarios de $T_{x_0}M$ (el cual es compacto en $T_{x_0}M$) podemos extraer un punto de acumulación $v_\infty \in T_{x_0}M$ de $\{\dot\gamma_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y, sin pérdida de generalidad, asumir que

$$\lim_{n\to+\infty} \dot\gamma_n(0) = v_\infty.$$

Con esa dirección se construye el rayo geodésico

$$\gamma(t) = \exp_{x_0}(t\, v_\infty) \qquad t \in [0, +\infty)$$

de la misma forma que se hizo en la segunda parte de la proposición 3.3.2 y cumple que

$$\lim_{n\to+\infty} \gamma_n(t) = \gamma(t) \qquad \text{para todo } t \in [0, +\infty).^\dagger$$

Tomamos la función de busemann b_γ asociada a este rayo, por lo anterior, cumple que para cualquier sucesión divergente de tiempos positivos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$b_\gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} \big[d\big(\gamma(t_n), z\big) - t_n\big] = \lim_{n\to+\infty} \big[d\big(\gamma_n(t_n), z\big) - t_n\big].$$

[†]Recordar que este límite se calcula usando que para cada t existe un $k > 0$ tal que γ_n está definida en t para todo $n > k$.

En particular, tomando la sucesión de tiempos $\{t_n = d(x_n, x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$, por hipótesis tienden a infinito y además cumplen que $x_n = \gamma_n(t_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, reemplazando esta sucesión en la última igualdad, obtenemos que

$$b_\gamma(z) = \lim_{n\to+\infty} d_{\gamma(t_n)}(z) - t_n = \lim_{n\to+\infty} d_{x_n}(z) - d_{x_n}(x_0) = b_\infty(z)$$

la función de busemann asociada a la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que se anula en x_0.

(b) Este caso se cumple por la continuidad de la función distancia y no es de especial interés. □

Las funciones de busemann asociadas a un rayo geodésico γ dan una noción de distancia asintótica al rayo geodésico, como tal, vemos como dependen del comportamiento "en infinito" de la curva γ.

Definición 3.4.5 (Distancia al infinito entre rayos)**.** *Sean $\gamma, \gamma' : [0, +\infty) \to M$ dos rayos geodésicos. Definimos la distancia al infinito entre los rayos como*

$$\delta_\infty(\gamma, \gamma') = \liminf_{t,t'\to+\infty} d\big(\gamma(t), \gamma'(t')\big)\,.$$

Lema 3.4.6. *Si $\gamma, \gamma' : [0, +\infty) \to M$ son dos rayos geodésicos tales que*

$$\delta_\infty\big(\gamma, \gamma'\big) = 0$$

entonces existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_\gamma = b_{\gamma'} + c\,.$$

Demostración. Sean dos puntos $z_1, z_2 \in M$ y dos sucesiones de tiempos positivos t_n, t'_n tales que

$$\lim_{n\to+\infty} d\big(\gamma(t_n), \gamma'(t'_n)\big) = \delta_\infty(\gamma, \gamma')\,.$$

Por la desigualdad triangular se tiene que

$$\begin{aligned} \big|\, d\big(\gamma(t_n), z_1\big) - d\big(\gamma'(t'_n), z_1\big)\,\big| &\leq d\big(\gamma(t_n), \gamma'(t'_n)\big) \\ \big|\, d\big(\gamma(t'_n), z_2\big) - d\big(\gamma'(t_n), z_2\big)\,\big| &\leq d\big(\gamma(t_n), \gamma'(t'_n)\big) \end{aligned}$$

sumando ambas desigualdades y agregando $t_n - t_n$ y $t'_n - t'_n$ adentro de los valores absolutos, obtenemos que

$$\begin{gathered}\big|\,\big[d\big(\gamma(t_n),z_1\big)-t_n+t_n-d\big(\gamma'(t_n),z_1\big)\big]+\big[d\big(\gamma(t'_n),z_2\big)-t'_n+t'_n-d\big(\gamma'(t'_n),z_2\big)\big]\,\big|\leq\\ \big|\,d\big(\gamma(t_n),z_1\big)-t_n+t_n-d\big(\gamma'(t_n),z_1\big)\,\big|+\big|\,d\big(\gamma(t'_n),z_2\big)-t'_n+t'_n-d\big(\gamma'(t'_n),z_2\big)\,\big|\leq\\ \leq 2\,d\big(\gamma(t_n),\gamma'(t'_n)\big)\end{gathered}$$

tomando el límite cuando n tiende a infinito se llega a que

$$0\ \leq\ |\,b_\gamma(z_1)-b_{\gamma'}(z_1)+b_\gamma(z_2)-b_{\gamma'}(z_1)\,|\ \leq\ 2\,d_\infty(\gamma,\gamma')\ =\ 0$$

es decir

$$b_\gamma(z_1)-b_{\gamma'}(z_1)\ =\ b_{\gamma'}(z_2)-b_\gamma(z_2)$$

para cualquier par de puntos $z_1, z_2 \in M$, concluyendo que existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_\gamma = b_{\gamma'} + c\,.$$

□

El siguiente corolario es consecuencia directa de esto último.

Corolario 3.4.7. *Sea $\gamma : (0,+\infty) \to M$ una geodésica minimizante. Dados $0 < a \leq b \in \mathbb{R}$ tomemos los rayos geodésicos $\gamma_1 : [a,+\infty) \to M$ y $\gamma_2 : [b,+\infty) \to M$ dados por*

$$\gamma_1 = \gamma|_{[a,+\infty)} \qquad \gamma_2 = \gamma|_{[b,+\infty)}$$

que son dos segmentos no acotados de la misma geodésica minimizante. Entonces sus funciones de busemann b_{γ_1} y b_{γ_2} difieren en una constante.

3.4.3 Ejemplos de funciones de Busemann en variedades

Vamos a ver como son las funciones de busemann en $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea, y en el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$ con la métrica de Lobachewski.

El espacio euclideano $\mathbb{R}^n$

Sea una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ y un vector $v \in \mathbb{R}^n$, tales que

- $x_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n\to+\infty} \| x_n \| = +\infty$.
- Si llamamos $v_n = \dfrac{x_n}{\| x_n \|}$ a los vectores normalizados, entonces $v_n \to v$.

Dado un punto arbitrario $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tomamos las semi-rectas $\gamma_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$, parametrizadas por longitud de arco, que parten de x_0 y pasan por x_n. Son los rayos geodésicos de la métrica euclídea y están dados por

$$\gamma_n(t) = t\frac{x_n - x_0}{\| x_n - x_0 \|} + x_0$$

Las funciones $B_n = d_{x_n} - d_{x_n}(x_0) \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ dadas por

$$B_n(x) = \| x - x_n \| - \| x_0 - x_n \| \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

como vimos en el lema 3.4.4 tienden a la función de busemann asociada al rayo $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ definido como $\gamma(t) = tv + x_0$ el cual es la semi-recta que parte de x_0 con dirección v.

$$\lim_{n\to+\infty} d_{x_n}(x) - d_{x_n}(x_0) = \lim_{t\to+\infty} [d_{\gamma(t)}(x) - t] = b_\gamma(x)$$

En este caso podemos calcular explícitamente el valor de $b_\gamma(z)$:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} \big[\| tv + x_0 - x \| - t \big] &= \lim_{t\to+\infty} \frac{\big(\| tv + x_0 - x \| - t \big)\big(\| tv + x_0 - x \| + t \big)}{\| tv + x_0 - x \| + t} = \\ = \lim_{t\to+\infty} \frac{\| tv + x_0 - x \|^2 - t^2}{\| tv + x_0 - x \| + t} &= \lim_{t\to+\infty} \frac{t^2(\| v \|^2 - 1) + 2t \langle v, x_0 - x \rangle}{t \| v \| + t} = \langle v, x_0 - x \rangle \end{aligned}$$

donde tomamos equivalencia de límites de polinomios y usamos que $\| v \| = 1$.

Funciones de busemann en $\mathbb{R}$

Fijando un $x_0 \in \mathbb{R}$, calculemos la función de busemann asociada a una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to +\infty$. Las funciones

$$B_{x_n}(z) = d_{x_n}(z) - d_{x_n}(x_0) = | x_n - z | - | x_n - x_0 |$$

se anulan en x_0 y toman su valor mínimo, $-d(x_n, x_0)$, en el punto x_n. Como $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiende a infinito podemos suponer que la sucesión es creciente y mayor a x_0. Si $z \leq x_n$ se tiene que

$$B_{x_n}(z) = x_n - z - (x_n - x_0) = x_0 - z$$

lo que implica que para todo $z \in \mathbb{R}$

$$b_\infty(z) = \lim_{n\to+\infty} B_{x_n}(z) = x_0 - z\,.$$

Vemos ahora que coincide con la función de busemann asociada a la semi-recta $\gamma(t) = x_0 + t$ definida para tiempos mayores o iguales a cero. Fijado un $z \in \mathbb{R}$, para $t > z$

$$d_{\gamma(t)}(z) - t = (x_0 + t - z) - t = x_0 - z$$

donde se ve como

$$b_\gamma \;=\; \lim_{t\to+\infty} d_{\gamma(t)} - \,t \;=\; \lim_{n\to+\infty} d_{x_n} - \,d_{x_n}(x_0) \;\;=\;\; b_\infty\,.$$

Funciones de busemann en $\mathbb{R}^2$

Fijando un $x_0 \in \mathbb{R}^2$, calculemos la función de busemann asociada a una sucesión de vectores $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ tal que $\| x_n \| \to +\infty$. Las funciones

$$B_{x_n}(z) = \| x_n - z \| - \| x_n - x_0 \|$$

cuyos gráficos son conos que se anulan en el círculo $\{z \in \mathbb{R}^2 \mid \| z - x_n \| = \| x_n - x_0 \|\}$ y tienen su mínimo absoluto en $z = x_n$ con valor $-\| x_n - x_0 \|$.

Sin pérdida de generalidad suponemos que la sucesión $\{\| x_n \|\}_{n\in\mathbb{N}}$ es no nula, creciente, tiende a infinito y que $\dfrac{x_n}{\| x_n \|} \to v\,.$

Ya vimos que

$$b_\infty(z) = \lim_n d_{x_n}(z) - d_{x_n}(x_0) = \langle\, v, x_0 - z \,\rangle$$

cuyo gráfico es un plano, tangente a todos los conos a lo largo de la recta $x_0 - z = tv$ con $t \in \mathbb{R}$.

El plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$

Tomamos el modelo del semiplano $\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ con la métrica hiperbólica que en coordenadas canónicas está dada por la matriz $\{g_{ij}\}$

$$\{g_{ij}\}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}.$$

Las geodésicas $\gamma : (-\infty, +\infty) \to \mathbb{H}^2$ parametrizadas por longitud de arco en esta variedad riemanniana son de dos tipos:

i) Las rectas verticales

$$\gamma_1(t) = \big(x_0, e^t\big).$$

ii) Las semicircunferencias con centro $(x_0, 0)$ en el eje horizontal y radio $r > 0$

$$\gamma_2(t) = \big(x_0 + r\tanh(t),\, r\,\mathrm{sech}(t)\big).$$

Donde *tanh* es la tangente hiperbólica

$$\tanh(t) = \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$$

y *sech* es la secante hiperbólica

$$\mathrm{sech}(t) = \frac{1}{\cosh(t)} = \frac{2}{e^t + e^{-t}}\,.$$

Como cualquier par de estas curvas se intersectan a lo sumo en un punto, entonces se cumple que dados dos puntos arbitrarios, existe una única geodésica que los une, que por lo tanto es minimizante. En particular, tomando cualquier subintervalo de tiempos de la forma $[t_0, +\infty)$ o $(-\infty, t_0]$, las restricciones de estas curvas a esos subintervalos son rayos geodésicos.

Dado un punto x_0 arbitrario, queremos calcular la función de busemann b_γ asociada al rayo geodésico vertical

$$\gamma_1(t) = \big(x_0, e^t\big).$$

Para eso precisamos conocer la función distancia en $\mathbb{H}^2$, que presentamos sin demostración, el lector interesado puede consultar [Bea12, Sección 7.2].

Proposición 3.4.8. *Sean* (x_1, y_1) *y* (x_2, y_2) *con* y_1, y_2 *mayores que* 0*, dos puntos en* $\mathbb{H}^2$*. Entonces la distancia entre ambos está dada por la fórmula*

$$d\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \operatorname{arcosh}\left(1 + \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}{2y_1 y_2}\right)$$

donde arcosh *es la inversa del coseno hiperbólico* $\cosh(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$.

Lema 3.4.9. *Dado un* $x_0 \in \mathbb{R}$*, sea* $\gamma_1(t) : [0, +\infty) \to \mathbb{H}^2$ *el rayo geodésico vertical, dado por*

$$\gamma_1(t) = \big(x_0, e^t\big)$$

entonces su función de busemann $b_{\gamma_1} : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{R}$ *es*

$$b_{\gamma_1}(x, y) = \lim_{t \to +\infty} d_{\gamma_1(t)}(x, y) - t = \ln\left(\frac{1}{y}\right).$$

La prueba de este lema es una computación directa del límite que no es necesario incluir aquí. Observar sí, que como el límite no depende de x_0, todos los rayos geodésicos verticales poseen la misma función de busemann asociada modulo una constante (acorde al lema 3.4.6). Lo cual, gracias al siguiente resultado, nos servirá para encontrar las funciones de busemann correspondientes al resto de los rayos geodésicos de $\mathbb{H}^2$.

Lema 3.4.10. *Sea* (M, g) *una variedad riemanniana y* $f : M \to M$ *una isometría. Si una curva* $\gamma_1 : [0, +\infty) \to M$ *es un rayo geodésico y* $b_{\gamma_1} : M \to \mathbb{R}$ *es su función de busemann asociada, entonces*

$$\gamma_2 = f \circ \gamma_1$$

también es un rayo geodésico, y su función de busemann asociada es

$$b_{\gamma_2} = b_{\gamma_1} \circ f^{-1}.$$

Demostración. Como las isometrías preservan la distancia y γ_1 minimiza la distancia entre cualquier par de puntos de su imagen, entonces lo mismo ocurre con γ_2. Además, al γ_1 estar parametrizada por longitud de arco entonces γ_2 también lo está, porque f preserva la norma de la velocidad de las curvas. Se cumple entonces, por lo visto en 3.3.1, que γ_2 es un rayo geodésico.

Por otra parte, calculamos su función de busemann en un punto $z \in M$

$$\begin{aligned} b_{\gamma_2}(z) &= \lim_{t\to+\infty} d_{\gamma_2(t)}(z) - t \\ &= \lim_{t\to+\infty} d_{f\circ\gamma_1(t)}(z) - t \\ &= \lim_{t\to+\infty} d_{\gamma_1(t)}\big(f^{-1}(z)\big) - t \\ &= b_{\gamma_1} \circ f^{-1}(z). \end{aligned}$$

□

Podemos usar este resultado para encontrar el resto de las funciones de busemann, gracias a que se conocen todas las isometrías del plano hiperbólico.

Definición 3.4.11 (Transformaciones de Möbius)**.** *Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que $ad - bc = 1$, sea la función f definida en el espacio hiperbólico extendido, agregando un punto en infinito, $f : \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\}$ dada por*

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde estamos usando la identificación usual de $\mathbb{H}^2$ con los números complejos con parte imaginaria positiva.

Proposición 3.4.12. *Las transformaciones de Möbius tienen las siguientes propiedades:*

(a) El conjunto de transformaciones de Möbius con la composición de funciones es un grupo.

(b) La inversa de $f(z) = \dfrac{az + b}{cz + d}$ es la función $f^{-1}(z) = \dfrac{dz - b}{-cz + a}$.

(c) Hacen corresponder círculos generalizados (rectas y círculos) en círculos generalizados.

(d) Son isometrías del plano hiperbólico.

Las propiedades (c) y (d), junto con el lema 3.4.10, implican que para cualquier par de rayos geodésicos existe una transformación de Möbius que los hace corresponder. Como ya tenemos una función de busemann asociada a las rectas verticales (del lema3.4.9), la usamos para encontrar el resto de las funciones de busemann.

Con la notación compleja, partiendo del rayo geodésico $\gamma_1(t) = i\,e^t$, la transformación de Möbius $f : \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\} \to \mathbb{H}^2 \cup \{\infty\}$ manda γ_1 en el rayo

$$\gamma_2(t) = f(i\,e^t) = \frac{aie^t + b}{cie^t + d}$$

el cual por el lema 3.4.10, tiene función de busemann

$$b_{\gamma_2}(z) = b_{\gamma_1} \circ f^{-1}(z) = \ln\left(\frac{1}{\mathrm{Im}\big(f^{-1}(z)\big)}\right) = \ln\left(\frac{(a-cx)^2 + c^2y^2}{y}\right)$$

donde $z = (x, y)$ con $y > 0$. Estas son entonces todas las funciones de busemann del plano hiperbólico $\mathbb{H}^2$.

Capítulo 4

Aplicaciones a problemas gravitacionales

4.1 Problemas de n cuerpos

4.1.1 Introducción

En esta sección trataremos el movimiento de n cuerpos en un espacio euclideano de dimensión finita $\mathbb{R}^k$, definido por las fuerzas de atracción mutua correspondientes al modelo newtoniano de gravitación. Una configuración $x = (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^{nk}$ determina la posición, en un instante dado, de los n cuerpos, como tal, nos restringimos al espacio de configuraciones sin colisiones

$$\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^{nk} \mid r_i \neq r_j \text{ siempre que } 1 \leq i < j \leq n \right\}$$

que es una abierto denso de $\mathbb{R}^{nk}$. En este abierto definimos el potencial newtoniano $U : \Omega \to \mathbb{R}$

$$U(x) = \sum_{i<j} \frac{m_i m_j}{r_{ij}}$$

donde el parámetro $m_i > 0$ es la masa correspondiente al cuerpo i-ésimo, y el valor $r_{ij} = \| r_i - r_j \|$ determina la distancia euclídea entre el cuerpo i y el cuerpo j.

Al estar todos los cuerpos en posiciones distintas, cada uno es atraído por los restantes con una fuerza proporcional al producto de las masas e inversamente proporcional al cuadrado de

la distancia mutua. La constante de proporcionalidad depende de las unidades elegidas. Como para la dinámica del sistema no hace diferencia, la tomamos como la unidad. Se tiene entonces que la fuerza ejercida por el cuerpo j sobre el cuerpo i es el vector $F_{ij}(x)$

$$F_{ij}(x) = \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(r_j - r_i)}{r_{ij}}$$

y la fuerza total sobre el cuerpo i-ésimo es

$$F_i(x) = \sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(r_j - r_i)}{r_{ij}}.$$

Observamos ahora que la derivada parcial del potencial newtoniano U según r_i en x es

$$\frac{\partial U}{\partial r_i}(x) = -\sum_{j \neq i} \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2} \frac{(r_i - r_j)}{r_{ij}} = F_i(x).$$

Con esto podemos escribir la segunda ley de newton aplicada a cada cuerpo como

$$m_i \ddot{r}_i = \frac{\partial U}{\partial r_i}(x) \quad \text{para todo } i = 1, \ldots, n.$$

Ahora bien, es útil considerar el producto interno de las masas en $\mathbb{R}^{nk}$, que a dos configuraciones $x = (r_1, \ldots, r_n)$ e $y = (s_1, \ldots, s_n)$ asocia el valor

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} m_i \langle r_i, s_i \rangle_{\mathbb{R}^k}.$$

Si calculamos el gradiente del potencial U con este producto interno obtenemos

$$\nabla U(x) = \left(m_1^{-1} \frac{\partial U}{\partial r_1}(x), \ldots, m_n^{-1} \frac{\partial U}{\partial r_n}(x) \right)$$

con el cual las ecuaciones de Newton se escriben de forma más compacta

$$\ddot{x} = \nabla U(x).$$

4.1.2 Movimientos completamente parabólicos

Definición 4.1.1. *Sea $x(t) : [a, +\infty) \to \Omega$ una solución del problema de Newton $\ddot{x}(t) = \nabla U\big(x(t)\big)$. Decimos que es un* movimiento completamente parabólico *si cumple*

$$\lim_{t \to +\infty} \dot{x}(t) = 0.$$

Como primera propiedad vemos que estos movimientos están en el nivel de energía nulo.

Proposición 4.1.2. *Sea $x(t) : [a, +\infty) \to \Omega$ un movimiento completamente parabólico. Sea $h = T\big(\dot{x}(t)\big) - U\big(x(t)\big)$ su energía. Entonces necesariamente $h = 0$.*

Demostración. Como la energía cinética es $T\big(\dot{x}(t)\big) = \dfrac{1}{2} \| \dot{x}(t) \|^2$ entonces por hipótesis tendremos que

$$\lim_{t \to +\infty} T\big(\dot{x}(t)\big) = 0.$$

Con lo cual, como h es independiente del tiempo

$$h = \lim_{t \to +\infty} T\big(\dot{x}(t)\big) - U\big(x(t)\big) = \lim_{t \to +\infty} -U\big(x(t)\big).$$

Esta última igualdad nos dice que existe el límite de $U\big(x(t)\big)$ cuando t tiende a infinito, y además, como el potencial newtoniano U es una función positiva, obtenemos que $h \leq 0$.

Ahora, supongamos que la energía h fuera negativa y consideremos el momento de inercia de la solución $I(t) = \langle\, x(t), x(t) \,\rangle$ (como es habitual, se usa el producto interno de las masas y se toma el momento de inercia respecto al origen, porque se asume que el centro de masa $G(t)$ se encuentra fijo en el mismo).

Usando la identidad de Lagrange-Jacobi $\ddot{I}(t) = 2\, T\big(\dot{x}(t)\big) + 2h$ se obtiene que

$$\lim_{t \to +\infty} \ddot{I}(t) = 2h < 0.$$

Lo que implica que para un intervalo no acotado de tiempos $(t_0, +\infty)$ existe una constante $k > 0$ tal que el momento de inercia tiene derivada segunda $\ddot{I}(t) < -k < 0$. Esto último implicaría que

$$\lim_{t \to +\infty} I(t) = -\infty$$

con lo cual existiría un tiempo positivo t_{col} en el cual $I(t_{col}) = 0$, algo que solo puede ocurrir si $x(t_{col}) = 0 \in \mathbb{R}^{nk}$ y esto correspondería a una colisión total en tiempo finito, contradiciendo que la solución esté definida en un intervalo no acotado.

Se dio el absurdo al suponer que h era negativa con lo cual concluímos que $h = 0$. □

Una clase particular de soluciones son las provenientes de las configuraciones llamadas centrales.

Definición 4.1.3 (Configuración central)**.** *Una configuración $x_0 \in \Omega$ se denomina* configuración central *si existe una función $\phi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^+$ con $\phi(0) = 1$ tal que la curva*

$$x(t) = \phi(t)\, x_0$$

es solución del problema de Newton $\ddot{x} = \nabla U(x)$.

Proposición 4.1.4. *Una configuración $x_0 \in \Omega$ es central sí y solo sí existe un $k \in \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\nabla U(x_0) + k\, x_0 = 0.$$

Más aún

$$k = \frac{U(x_0)}{I(x_0)}$$

donde $I(x_0) = \langle\, x_0, x_0 \,\rangle$ es el momento de inercia de la configuración con respecto al origen.

Demostración. Planteando la ecuación de newton para la solución $x(t) = \phi(t)\, x_0$ vemos que

$$\ddot{\phi}(t)\, x_0 = \nabla U\big(\phi(t)\, x_0\big) = \phi(t)^{-2} \nabla U(x_0)$$

porque el gradiente ∇U es homogéneo de grado -2. Como suponemos que $\phi \neq 0$ entonces esta igualdad vectorial equivale a que exista un $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla U(x_0) + k\, x_0 = 0$$

y que ϕ sea solución de la ecuación diferencial

$$\ddot{\phi}\, \phi^2 = -k.$$

Considerando siempre el producto interno de las masas, como $\langle\, \nabla U(x_0) + k\, x_0, x_0 \,\rangle = 0$ vemos que

$$0 = \langle\, \nabla U(x_0), x_0 \,\rangle + k\, \langle\, x_0, x_0 \,\rangle = -U(x_0) + kI(x_0)$$

por el teorema de Euler para funciones homogéneas, ya que U es homogénea de grado -1. Concluímos que

$$k = \frac{U(x_0)}{I(x_0)} > 0.$$

□

Notar que la ecuación diferencial que debe cumplir ϕ corresponde a una solución del problema unidimensional de dos cuerpos de Kepler.

Lema 4.1.5 (Configuraciones centrales como puntos críticos)**.** *Sea $x_0 \in \Omega$ una configuración con momento de inercia $I(x_0) = c$. Entonces es una configuración central sí y solo sí es punto crítico de U restricto al conjunto $\{x \in \Omega \mid I(x) = c\}$.*

Demostración. El gradiente (respecto al producto interno de las masas) de $I(x) = \langle x, x \rangle$ es el vector

$$\nabla I(x_0) = 2\, x_0.$$

El método de multiplicadores de Lagrange nos dice que x_0 es punto crítico de U restricto al conjunto $\{x \in \Omega \mid I(x) = c\}$ sí y solo sí existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 = \nabla U(x_0) + \lambda \nabla I(x_0) = \nabla U(x_0) + 2\lambda\, x_0$$

que es la condición para que x_0 sea configuración central con $k = 2\lambda$. □

Proposición 4.1.6. *Para toda configuración central x_0 existe un $\alpha \neq 0$ tal que*

$$x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$$

es un movimiento completamente parabólico definido en $(0, +\infty)$.

Demostración. Suponiendo que $x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$ es solución definida en $(0, +\infty)$, tiene derivada

$$\dot{x}(t) = \frac{2}{3}\, \alpha\, t^{-\frac{1}{3}}\, x_0$$

la cual cumple que $\dot{x}(t) \to 0$ cuando t tiende a $+\infty$ como es requerido.

Para encontrar un tal α, tomamos la función $\phi(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}$, sus derivadas son

$$\dot{\phi}(t) = \frac{2}{3}\, \alpha\, t^{-\frac{1}{3}} \qquad \ddot{\phi}(t) = -\frac{2}{9}\, \alpha\, t^{-\frac{4}{3}}$$

planteamos la ecuación de Kepler

$$-k = \ddot{\phi}\, \phi^2 = -\frac{2}{9}\, \alpha\, t^{-\frac{4}{3}} \alpha^2\, t^{\frac{4}{3}} = -\frac{2}{9}\, \alpha^3$$

y esta se cumple para

$$\alpha = \left(\frac{9}{2}k\right)^{\frac{1}{3}}.$$

□

Tenemos el siguiente resultado debido a [LM14, Teorema 1.1].

Proposición 4.1.7. *Si $x(t) : [0, +\infty) \to E^N$ es una minimizante a tiempo libre del problema de N-cuerpos en un espacio euclídeo E de dimensión $dim(E) \geq 2$ entonces $x(t)$ es un movimiento completamente parabólico.*

A su vez, se cumple el recíproco para un tipo especial de configuración central, llamada configuración mínima.

Definición 4.1.8 (Configuración mínima)**.** *Decimos que $x_0 \in \Omega$ es una configuración mínima si es un mínimo de*

$$U|_{\{I=1\}}$$

el potencial newtoniano restricto al conjunto de configuraciones con momento de inercia unitario con respecto al origen.

Una configuración mínima es automáticamente un punto crítico de $U|_{\{I=1\}}$, en particular es una configuración central, según se demostró en el lema 4.1.5. Como tal, genera un movimiento homotético completamente parabólico que nos es de especial interés, como vemos en el siguiente teorema.

Teorema 4.1.9. *Si $x_0 \in \Omega$ es una configuración mínima entonces su movimiento homotético completamente parabólico correspondiente*

$$x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0 \qquad \text{con } \alpha = \left(\frac{9}{2}\, U(x_0)\right)^{\frac{1}{3}}$$

es minimizante a tiempo libre.

Demostración. Sea $\gamma : [a, b] \to \Omega$ una curva diferenciable con los mismos extremos que $x(t)$, esta se expresa en coordenadas polares como

$$\gamma(t) = \rho(t)\, \theta(t)$$

donde $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ es una función positiva con $\rho(b) = I\big(x(t_1)\big)^{\frac{1}{2}}$ y $\rho(a) = I\big(x(t_0)\big)^{\frac{1}{2}}$, y la función $\theta : [a, b] \to \{I = 1\}$ es una curva de configuraciones con momento de inercia unitario, tal que $\theta(a) = \theta(b) = x_0$.

Queremos minimizar la acción del lagrangiano $L = T + U$ en el conjunto de curvas γ con extremos fijos, definidas en cualquier subintervalo compacto $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Como $x(t)$ se mueve en la dirección de un mínimo de U, buscamos probar que desviarse del movimiento homotético parabólico "encarece" la acción.

La derivada de γ es

$$\dot{\gamma}(t) = \dot{\rho}(t)\,\theta(t) + \rho(t)\,\dot{\theta}(t)$$

donde $\dot{\theta}(t) \in T_{\theta(t)}\{I = 1\}$, por ende $\langle \theta(t), \dot{\theta}(t) \rangle = 0$ y

$$\langle\, \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\,\rangle = \dot{\rho}(t)^2 \,\|\,\theta(t)\,\|^2 + \rho(t)^2\,\|\dot{\theta}(t)\|^2 = \dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\,\|\dot{\theta}(t)\|^2$$

porque $\theta(t) \in \{I = 1\}$ para todo $t \in [a, b]$.

El lagrangiano en la curva velocidad $(\gamma, \dot{\gamma})$ vale

$$\begin{aligned} L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) &= T\big(\dot{\gamma}(t)\big) + U\big(\gamma(t)\big) = \frac{1}{2}\,\langle\, \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t)\,\rangle + U\big(\rho(t)\,\theta(t)\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}(t)^2 + \rho(t)^2\,\|\dot{\theta}(t)\|^2\right) + \frac{U\big(\theta(t)\big)}{\rho(t)}. \end{aligned}$$

Es una suma de tres términos positivos, como x_0 es una configuración mínima, tomar $\theta(t) \equiv x_0$ minimiza el último término y anula el segundo. Llegamos entonces a la desigualdad

$$L\big(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)\big) \geq \frac{1}{2}\,\dot{\rho}(t)^2 + \frac{U(x_0)}{\rho(t)} \quad \text{ para todo } t \in [a, b]$$

con igualdad sí y solo sí $\theta(t) \equiv x_0$, lo que nos sugiere tomar la curva $\sigma : [a, b] \to \Omega$ definida como

$$\sigma(t) = \rho(t)\,x_0.$$

Por lo anterior, tenemos que $\mathbb{A}_L(\gamma) \geq \mathbb{A}_L(\sigma)$ y en definitiva estamos buscando minimizar la acción

$$\mathbb{A}_L(\sigma) = \int_a^b \frac{1}{2}\,\dot{\rho}(t)^2 + \frac{U(x_0)}{\rho(t)}\,dt$$

en el conjunto de curvas diferenciables $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ con extremos fijos, definidas en cualquier subintervalo compacto $[a, b] \subset (0, +\infty)$.

Pero esto equivale a encontrar una minimizante a tiempo libre en el problema unidimensional reducido de fuerzas centrales de Kepler. Para ver esto, consideremos dos cuerpos en la recta

real, un cuerpo de masa $U(x_0)$ fijo en el origen, y otro cuerpo, de masa unitaria, en la posición $\rho > 0$ que se mueve por la fuerza de atracción que le ejerce el cuerpo fijo en el origen.

En este caso el espacio de configuraciones es $\mathbb{R}^+$ (las posibles posiciones del cuerpo movil) y el potencial newtoniano es la función

$$\tilde{U} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \qquad \tilde{U}(\rho) = \frac{U(x_0)}{\rho}.$$

En el artículo [LM14] se demuestra que en el problema de los $n-$cuerpos, dadas dos configuraciones $x_0, x_1 \in \Omega$ siempre existe una minimizante a tiempo libre que las une. Aplicando este resultado entre las posiciones $\rho_1 = I\big(x(t_1)\big)^{\frac{1}{2}}$ y $\rho_2 = I\big(x(t_0)\big)^{\frac{1}{2}}$, obtenemos una curva minimizante a tiempo libre $\rho : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ que une ρ_1 con ρ_2.

Para ver que es el movimiento homotético parabólico recordamos que:

- Por ser minimizante es extremal y por ende solución del problema de Newton (ver corolario 2.1.13).
- Al ser minimizante a tiempo libre tiene energía 0 (por el lema 3.2.6).

En el caso unidimensional de fuerzas centrales de Kepler se conocen todas las soluciones y la solución con energía nula es el movimiento parabólico

$$\rho(t) = \tilde{\alpha}\, t^{\frac{2}{3}} \rho_0 \quad \text{ con } \tilde{\alpha} = \left(\frac{9}{2}k\right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{ y } \quad k = \frac{\tilde{U}(\rho_0)}{I(\rho_0)} = \frac{U(x_0)}{\rho_0^3}$$

con lo cual

$$\rho(t) = \left(\frac{9}{2}\, U(x_0)\right)^{\frac{1}{3}}\, t^{\frac{2}{3}}$$

como queríamos demostrar. □

4.1.3 Reparametrización de un movimiento homotético parabólico

El resultado anterior junto con el teorema 3.2.7 nos dice que si x_0 es una configuración mínima, entonces su movimiento homotético completamente parabólico se puede reparametrizar a una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi.

Si esta reparametrización mantiene la no acotación de su intervalo de definición, entonces es un rayo geodésico y tiene una función de busemann asociada.

Vamos a calcular esta reparametrización.

Sea $x_0 \in \Omega$ una configuración mínima y $\alpha > 0$ tal que $x : (0, +\infty) \to \Omega$ dada por $x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$ es un movimiento completamente parabólico minimizante a tiempo libre.

Buscamos una función $f : (a, b) \to (0, +\infty)$ diferenciable, con $f'(t) > 0$ para todo $t \in (a, b)$, tal que $x\big(f(t)\big)$ sea geodésica de la métrica de Jacobi. Para esto alcanza con que la norma de la velocidad

$$\left\| \frac{d}{dt} x\big(f(t)\big) \right\|_J = 1 \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

Recordando que $\| v \|_J = \sqrt{2}(U(x) + h)^{\frac{1}{2}} \| v \|_x$ para todo vector $v \in T_x M$, que la energía $h = 0$ en este caso y que U es homogénea de grado -1, entonces

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} x\big(f(t)\big) \right\|_J = \; 1 &= \sqrt{2} U\big(x\big(f(t)\big)\big)^{\frac{1}{2}} \left\| \dot{x}\big(f(t)\big) \right\| f'(t) \\ &= \sqrt{2} \left(\frac{U(x_0)}{\alpha f(t)^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{2}{3} \alpha f(t)^{-\frac{1}{3}} x_0 \right\| f'(t) \\ 1 &= \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} U(x_0)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}} f(t)^{-\frac{2}{3}} \| x_0 \| f'(t) \end{aligned}$$

Como $\| x_0 \| = 1$ y si llamamos $\lambda = \dfrac{2^{\frac{3}{2}}}{3} U(x_0)^{\frac{1}{2}} \alpha^{\frac{1}{2}}$ vemos que obtuvimos la ecuación diferencial de variables separables

$$\frac{1}{\lambda} = f(t)^{-\frac{2}{3}} f'(t)$$

la cual tiene solución

$$\frac{t}{\lambda} = 3 f(t)^{\frac{1}{3}} - 3 f(0)^{\frac{1}{3}}$$

con cual la reparametrización buscada es la función

$$f(t) = \left(\frac{t}{3\lambda} + f(0)^{\frac{1}{3}} \right)^3 \quad \text{definida en } (a, +\infty)$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es el valor que cumple $f(a) = 0$, si elegimos $f(0)$ para que a valga 0, nos queda que la geodésica de la métrica de Jacobi es la curva $\gamma : (0, +\infty) \to (\Omega, g_J)$ definida como

$$\gamma(t) = x\big(f(t)\big) = \frac{t^2}{8\, U(x_0)} x_0$$

y por lo dicho anteriormente, es una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi del nivel de energía $h = 0$.

4.1.4 El teorema de Marchal y sus aplicaciones

Recordamos que dadas dos configuraciones $x, y \in E^N$ y un tiempo $\tau > 0$, se busca minimizar la acción del lagrangiano en el conjunto de curvas con extremos y tiempo fijos

$$\mathcal{C}(x, y, \tau) = \left\{\gamma : [a, b] \to E^N \text{ absolutamente continua } \mid \gamma(a) = x,\ \gamma(b) = y,\ b - a = \tau\right\}.$$

Tales minimizantes serán extremales y por ende soluciones del problema de Newton siempre y cuando estén incluídas en Ω el conjunto de configuraciones sin colisiones.

También habíamos llamado

$$\mathcal{C}(x, y) = \bigcup_{\tau>0} \mathcal{C}(x, y, \tau)$$

al conjunto de curvas absolutamente continuas que unen dos configuraciones sin restricción en el intervalo de tiempo en que están definidas. También definimos las funciones

$$\phi(x, y, \tau) = \inf \{\mathbb{A}_L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)\}$$

junto con

$$\phi(x, y) = \inf_{\tau>0} \phi(x, y, \tau) = \inf \{\mathbb{A}_L(\gamma) \mid \gamma \in \mathcal{C}(x, y)\}$$

el potencial crítico de Mañé.

Notar que en lo anterior se consideran configuraciones y curvas en E^N, es decir, admitiendo colisiones. El siguiente teorema ([Mar02]) nos asegura que al minimizar la acción, las colisiones solo pueden estar en los extremos.

Teorema 4.1.10 (Marchal)**.** *Sea E un espacio euclideano de dimensión mayor a 1. Si una curva $\gamma : [a, b] \to E^N$ cumple que*

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi\big(\gamma(a), \gamma(b), b - a\big)$$

entonces $\gamma(t) \in \Omega$ para todo $t \in (a, b)$.

La teoría desarrollada por Tonelli dice que cuando se toma un tipo de lagrangiano particular (los llamados lagrangianos de Tonelli) entonces para todo $x, y \in E^N$ y $\tau > 0$ siempre existe una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ que cumple que

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x, y, \tau).$$

En el caso gravitacional, el lagrangiano generado por el potencial newtoniano es de Tonelli, por lo anterior siempre se realizan los mínimos a tiempo fijos y resumimos en el siguiente corolario la relevancia de estas curvas.

Corolario 4.1.11. *Sea E un espacio euclideano de dimensión mayor a 1. Entonces para todo par de configuraciones $x, y \in E^N$ y todo tiempo positivo $\tau > 0$ existe por lo menos una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ tal que*

$$\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x, y, \tau)$$

y también cumple que

$$\gamma(t) \in \Omega \quad \text{para todo } t \in (0, \tau).$$

En particular la restricción de γ a $(0, \tau)$ satisface las ecuaciones de Newton y, por tanto, representa un movimiento verdadero del problema de N-cuerpos.

Cabe destacar que la condición que $\dim(E) \geq 2$ es necesaria porque en el caso unidimensional el espacio de configuraciones Ω no es conexo y existen pares de configuraciones que no admiten curvas que las unan sin colisiones intermedias.

Ahora bien, otro resultado muy importante es la existencia de minimizantes a tiempo libre entre configuraciones distintas.

Teorema 4.1.12. *Dadas dos configuraciones distintas $x \neq y \in E^N$ existe un tiempo $\tau > 0$ y una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ tal que $\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x, y)$.*

Esta curva también es minimizante en su tiempo y si $\dim(E) \geq 2$ entonces, aplicando el teorema de Marchal, no tiene colisiones intermedias y obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.1.13. *Si $x \neq y \in \Omega$ son dos configuraciones sin colisiones distintas, entonces existe una curva $\gamma : [a, b] \to \Omega$ minimizante a tiempo libre con $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.*

Esto, en términos de la métrica de Jacobi del nivel de energía 0, equivale a que existan geodésicas minimizantes entre cualquier par de puntos, es decir (Ω, g_J) es geodésicamente convexa.

4.1.5 La métrica de Jacobi del nivel de energía 0

Vimos en la sección anterior que los movimientos completamente parabólicos del problema de N cuerpos tienen energía $h = 0$ y que la métrica de Jacobi en ese nivel de energía es geodésicamente convexa. Como el potencial newtoniano $U(r_1, \ldots, r_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{r_i j}$ es positivo, entonces el conjunto $V_0 = \{x \in \Omega \mid U(x) > 0\}$ entonces la métrica de Jacobi correspondiente está definida en todo el abierto $\Omega \subset E^N$ y vale

$$g_J(x) = 2\,U(x)\,g(x).$$

De la proposición 4.1.9 obtuvimos una geodésica minimizante de la métrica de Jacobi de la forma

$$\gamma(t) = \lambda\, t^2\, x_0$$

con $\lambda > 0$, $t \in (0, +\infty)$. Como el límite

$$\lim_{t \to 0} \gamma(t) = 0 \notin \Omega$$

entonces esta geodésica no se puede extender a todo el pasado y concluímos que (Ω, g_J) no es completa como variedad riemanniana.

Tenemos entonces que la variedad riemanniana (Ω, g_J) no es completa pero sí convexa. Admite rayos geodésicos que no se pueden extender a una geodésica definida para todo tiempo, cabe entonces la pregunta ¿Existe alguna geodésica minimizante definida para todo tiempo?

La respuesta es negativa y se demuestra nuevamente haciendo uso del teorema de Marchal.

Teorema 4.1.14. *Si $dim(E) \geq 2$ no hay minimizantes a tiempo libre del problema de N-cuerpos definidas para todo tiempo $t \in \mathbb{R}$.*

La idea de la prueba es que por absurdo se supone la existencia de una tal minimizante a tiempo libre $x(t) : (-\infty, +\infty) \to E^N$ y a partir de ella se construye una minimizante a tiempo libre $\gamma : [-1, 1] \to E^N$ tal que $\gamma(0) = 0 \notin \Omega$ contradiciendo el teorema de Marchal, al ser minimizante a tiempo libre y tener una colisión (total) en un tiempo intermedio.

Para cerrar esta sección vemos como es la función distancia en (Ω, g_J).

Proposición 4.1.15. *Si $x, y \in \Omega$ entonces la distancia en la métrica de Jacobi es*

$$d(x, y) = \phi(x, y).$$

Demostración. El corolario del teorema 4.1.12 dice que si $x \neq y$ existe un $\tau > 0$ y una curva $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, \tau)$ con $\gamma\big([0, \tau]\big) \in \Omega$ tal que $\mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x, y)$. Juntado esto con la proposición 3.0.2 y el teorema 3.2.7 que dicen que las minimizantes a tiempo libre tienen acción igual a la distancia entre sus extremos concluímos que

$$d(x, y) = \ell_J(\gamma) = \mathbb{A}_L(\gamma) = \phi(x, y).$$

En el caso que $x = y$ se tiene que $\phi(x, x) = 0 = d(x, x)$ pero no existe una minimizante a tiempo libre definida en un tiempo $\tau > 0$ porque toda $\gamma \in \mathcal{C}(x, x, \tau)$ tiene acción positiva, aunque sea la curva constante $\gamma(t) = x$, porque $L = T + U$ es positivo en todo $T\Omega$. □

4.1.6 Función de busemann de un movimiento homotético parabólico

Hemos demostrado que si x_0 es una configuración mínima, entonces existe $\alpha > 0$ tal que la solución

$$x(t) = \alpha\, t^{\frac{2}{3}}\, x_0$$

es una curva minimizante a tiempo libre que se reparametriza al rayo geodésico de la métrica de Jacobi $\gamma : (0, +\infty) \to (\Omega, g_J)$ dado por la expresión

$$\gamma(t) = \frac{t^2}{8\, U(x_0)}\, x_0.$$

Proposición 4.1.16. *Sea $x_0 \in \Omega$ una configuración mínima. Entonces la función de busemann $b_\gamma : \Omega \to \mathbb{R}$ asociada al rayo geodésico que parte del origen $\gamma(t) = \dfrac{t^2}{8\, U(x_0)}\, x_0$ está dada por la expresión*

$$b_\gamma(z) = \lim_{t \to +\infty} \phi\big(\gamma(t), z\big) - \phi\big(\gamma(t), 0\big)$$

donde además, la convergencia es uniforme en compactos, en el espacio de funciones $C(\Omega, \mathbb{R})$.

Demostración. El teorema 3.4.3 establece la convergencia uniforme en compactos de

$$b_\gamma(z) = \lim_{t \to +\infty} d\big(\gamma(t), z\big) - t = \lim_{t \to +\infty} d\big(\gamma(t), z\big) - d\big(\gamma(t), \gamma(0)\big)$$

y por la proposición 4.1.15 vemos que este límite se puede reescribir como

$$b_\gamma(z) = \lim_{t\to+\infty} \phi\big(\gamma(t), z\big) - \phi\big(\gamma(t), 0\big).$$

□

Enunciamos un resultado debido a [PS14].

Teorema 4.1.17. *Dada un aconfiguración mínima $x_0 \in \Omega$, tomamos la función $u : \Omega \to \mathbb{R}$ opuesta a la función de busemann asociada al rayo $\gamma = \dfrac{t^2}{8\,U(x_0)}\,x_0$ con $t \in [0, +\infty)$ definida como*

$$u(x) = \lim_{t\to+\infty} \phi\big(\gamma(t), 0\big) - \phi\big(\gamma(t), x\big).$$

Entonces u es una solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$\| Du(x) \|^2 = 2\,U(x).$$

Más aún, para cada $x \in E^N$ existe una curva calibrante $\alpha : [0, +\infty) \to E^N$ de la función u que cumple que $\alpha(0) = x$ y que tomando $c = \left(\dfrac{9}{2}U(x_0)\right)^{\frac{1}{3}}$ entonces

$$\lim_{t\to+\infty} \Big\| \alpha(t)\, t^{-\frac{1}{3}} - c\, x_0 \Big\| = 0.$$

Referencias

[Bea12] A.F. Beardon. *The Geometry of Discrete Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2012. ISBN: 9781461211464.

[Bus05] Herbert Busemann. *The geometry of geodesics*. Courier Corporation, 2005.

[BGH98] G. Buttazzo, M. Giaquinta, and S. Hildebrandt. *One-dimensional Variational Problems: An Introduction*. Oxford lecture series in mathematics and its applications. Clarendon Press, 1998. ISBN: 9780198504658.

[doCar79] M. P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979. ISBN: 9788524400360.

[Gro07] M. Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*. Springer Science & Business Media, 2007.

[HZ11] H. Hofer and E. Zehnder. *Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics*. Modern Birkhäuser Classics. Springer Basel, 2011. ISBN: 9783034801041.

[Kel75] J.L. Kelley. *General Topology*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1975. ISBN: 9780387901251.

[LM14] Adriana da Luz and Ezequiel Maderna. "On the free time minimizers of the newtonian n-body problem". En: *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. Vol. 156. 02. Cambridge University Press. 2014, pp. 209–227.

[Mar02] C. Marchal. "How the Method of Minimization of Action Avoids Singularities". En: *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* 83.1 (2002), pp. 325–353.

[Pap05] Athanase Papadopoulos. *Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature*. European Mathematical Society, 2005.

[PS14] Boris Percino and Héctor Sánchez-Morgado. "Busemann Functions for the N-Body Problem". En: *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 213.3 (2014), pp. 981–991. ISSN: 1432-0673. DOI: 10.1007/s00205-014-0748-7.